3

スペクトル幾何

浦川 肇 著

新井 仁之・小林 俊行・斎藤 毅・吉田 朋広 編

共立講座 数学の輝き

共立出版

刊行にあたって

数学の歴史は人類の知性の歴史とともにはじまり，その蓄積には膨大なものがあります．その一方で，数学は現在もとどまることなく発展し続け，その適用範囲を広げながら，内容を深化させています．「数学探検」，「数学の魅力」，「数学の輝き」の3部からなる本講座で，興味や準備に応じて，数学の現時点での諸相をぜひじっくりと味わってください．

数学には果てしない広がりがあり，一つ一つのテーマも奥深いものです．本講座では，多彩な話題をカバーし，それでいて体系的にもしっかりとしたものを，豪華な執筆陣に書いていただきます．十分な時間をかけてそれをゆったりと満喫し，現在の数学の姿，世界をお楽しみください．

「数学の輝き」

数学の最前線ではどのような研究が行われているのでしょうか？ 大学院にはいっても，すぐに最先端の研究をはじめられるわけではありません．この第3部では，第2部の「数学の魅力」で身につけた数学力で，それぞれの専門分野の基礎概念を学んでください．一歩一歩読み進めていけばいつのまにか視界が開け，数学の世界の広がりと奥深さに目を奪われることでしょう．現在活発に研究が進みまだ定番となる教科書がないような分野も多数とりあげ，初学者が無理なく理解できるように基本的な概念や方法を紹介し，最先端の研究へと導きます．

編集委員

序　文

本書はコンパクトなリーマン多様体上のスペクトル幾何理論の大綱を展開することを目指しています．すなわち，コンパクトなリーマン多様体上の関数に作用するラプラシアン（ラプラス作用素）の固有値と固有関数の振る舞いの詳細を述べ，スペクトルからリーマン多様体の幾何の何が決まるかを述べます．

ラプラシアンの境界値固有値問題の歴史は古く，数理科学の根幹をなすものの一つであり，ヘルマン＝ワイルの 1911 年の仕事以来，数多くの研究がなされてきました．多くの日本人研究者の貢献がなされ，近年では，リーマン多様体の崩壊の研究と関連して，多くの重要な研究がなされています．しかしながら近年 1970 年代の重要な研究が忘れ去られつつあることを，常々残念に思っていました．特に，ラプラシアンのスペクトルからリーマン多様体の閉測地線の長さの集合が決定されること，固有値の評価，スペクトル剛性定理など，とても大事なのではなかろうか，という思いがありました．この度，その機会が共立出版の編集部の方から与えられ，昔がんばってサーベイしたノートを紐解き，改めてそれらの重要性を再確認することができたことは大変幸いなことでした．

本書は次のような構成からなります．まず第一章は準備です．後で必要となるリーマン多様体の基礎事項が述べられています．第二章はリーマン多様体の固有値のもつ基礎的かつ一般的な性質が述べられています．これは K. Uhlenbeck の 1976 年の仕事を問題の出発点とした板東重稔氏と小生との 1983 年の仕事ですが，近年フランスの数学者らによって使われるようになり，コーシー・リーマン幾何のコーシー・リーマン ラプラシアンでも興味ある結果が展開されています．

第三章は S. T. Yau によるラプラシアンの最小正固有値の下からの評価を扱います．これは 1975 年の彼の仕事に基づくものです．Yau の評価の利点は，

その評価がリーマン多様体の曲率など幾何的な諸量で下から評価されることにあり，これは大きな利点です．

第四章はラプラシアンの第 k 固有値に関する上からの評価と固有関数の節領域の個数に対する節領域定理に関する S.Y. Cheng の仕事を扱います．さらにリヒネロヴィッツ・小畠守生の古典的な定理も述べました．リヒネロヴィッツ・小畠守生の定理はコンパクトリーマン多様体の最小正固有値の最良の評価を与える定理であり，近年，微分幾何学の様々なところで使われる重要な定理です．

第五章では Q.M. Cheng の最近の仕事，任意のリーマン多様体内の有界領域上のディリクレ固有値問題の固有値のペイン・ポリア・ワインバーガー型不等式を述べます．

第六章は Colin de Verdiere による大きな仕事を扱います．彼はコンパクトなリーマン多様体のラプラシアンのスペクトルから閉測地線の長さの集合が決定されるという画期的な仕事をしました．本章では彼の仕事の詳細を紹介します．この仕事は極めて重要であり現在でもその輝きを失っていません．この結果は第七章において重要な役割を演じます．本書執筆当初，小生には一カ所不明な点があり，ずっと，その個所の証明を埋めることができないでいました．しかしながら勝田篤氏は原稿を詳細にお読み頂いて，このギャップを埋める 5 頁にのぼる詳細な証明を与えて下さいました．なお波動方程式を使った J. Chazarain の方法もありますが，本書では残念ながら紹介できませんでした．

第七章は本書のハイライトで，1980 年の V. Guillemin と D. Kazhdan らの仕事を紹介します．彼らの仕事は 35 年を経た今もなお，その輝きを失うどころか，益々その輝きを放っています．実際，コンパクトな負曲率多様体は数学のあらゆる分野に登場し，さまざまな剛性をもつことが知られています．本章もその一つで，シンプレクティック幾何，アノソフ流，測地流の話など総動員して負曲率多様体のスペクトル剛性定理の証明が行われ，極めて重要です．

本書は第一章と第五章を除いて，大部分を 1981 年 2 月に落合卓四郎氏が主催して行われた研究会「Surveys in Geometry」での講演資料 “Surveys in Geometry 1980–81”, “Geometry of the Laplace Operator”（小竹 武，前田 吉昭，小沢 真，浦川 肇）の中で，浦川が分担した資料に基づいています．この

ときの，落合卓四郎氏のご指導がなければ，本書はあり得ませんでした．更にまたこの講演資料の使用を快く許可して下さいました．これら数々のご指導に心から感謝申し上げます．第五章はQ.M. Cheng氏の仕事に基づいています．ご自身のお仕事の結果をこの本に使用することを快諾頂いたQ.M. Cheng氏に感謝申し上げます．最後に，本書の原稿を丁寧にお読み頂いて数々のミスをご指摘頂き，第六章での証明のギャップを埋めて頂いた勝田 篤氏に感謝申し上げます．

仙台にて

2015年早春　浦川　肇

目　次

第1章 ◇ リーマン幾何学の基礎事項

本章ではリーマン幾何学の基礎事項を復習する．多様体については多くの著書があるので基礎的な事項は既知とする．n 次元多様体 M 上のリーマン計量が与えられたとき，曲線の長さ，距離，レビ・チビタ接続，平行移動，測地線，曲率テンソル，積分，ベクトル場の発散とラプラシアン，グリーンの公式，微分形式のラプラシアン，曲線の長さの第 1 変分公式と第 2 変分公式について考察する．

1.1 リーマン多様体

1.1.1 リーマン計量

n 次元 C^∞ 多様体 M の定義を思い起こそう．ハウスドルフ位相空間 M が n **次元** C^∞ **多様体**であるとは，M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，すなわち，各 U_α $(\alpha \in \Lambda)$ が開集合で $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = M$ を満たすものと，M の開集合 U_α から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上への位相同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ が与えられ，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $(\alpha, \beta \in \Lambda)$ ならば，

$$\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ から別の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上への C^∞ 同相写像となるときをいう．$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $(\alpha \in \Lambda)$ を M の**局所チャート**という．

このとき，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の標準座標系を $(x^1, \ldots, x^n)$ とするとき，各局所チャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して，M の開集合 U_α 上に $x_\alpha^i := x^i \circ \varphi_\alpha$ $(i = 1, \ldots, n)$ により，局所座標系 $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ が与えられる．$(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ を**局所座標近傍系**という．

次に n 次元 C^∞ 多様体 M 上の C^∞ リーマン計量 g の定義を思い起こそう．

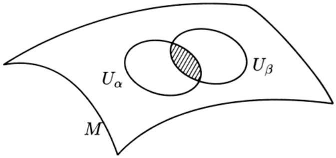


図 1.1 M の局所チャート

定義 1.1 M 上の C^∞ **リーマン計量** g とは，各点 $x \in M$ に対して，g_x が x における M の接空間 T_xM 上の対称正定値双線形写像であり，x について g_x は C^∞ であるものをいう．すなわち，$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ は次を満たす：任意の $u, v, w \in T_xM$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{cases} g_x(au+bv,w) = a\,g_x(u,w) + b\,g_x(v,w) \\ g_x(u,v) = g_x(v,u) \\ g_x(u,u) > 0 \qquad (0 \neq u \in T_xM) \end{cases} \tag{1.1}$$

を満たす．

このとき，M 上の局所座標系 $(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ について，g を

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^\alpha \, dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^j \qquad (U_\alpha \text{ 上で})$$

と表示することができる，ここで

$$g_{ij}^\alpha = g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right) = g_{ji}^\alpha \tag{1.2}$$

である．このとき，g_x が $x \in M$ について C^∞ であるとは，すべての g_{ij}^α が U_α 上の C^∞ 関数であることを意味する．

別の局所チャート (U_β, φ_β) と局所座標近傍系 $(U_\beta, (x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n))$ について $g = \sum_{k,\ell=1}^n g_{k\ell}^\beta \, dx_\beta^k \otimes dx_\beta^\ell$, $g_{k\ell}^\beta = g\big(\frac{\partial}{\partial x_\beta^k}, \frac{\partial}{\partial x_\beta^\ell}\big)$ と表示する．このとき

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば，任意の $k, \ell = 1, \ldots, n$ に対して，

$$g^\beta_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^n g^\alpha_{ij} \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^k_\beta} \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^\ell_\beta} \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上}) \tag{1.3}$$

が成り立つ．実際，M 上の C^∞ 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上において，$\frac{\partial f}{\partial x^i_\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^k_\beta}$ なので，

$$\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^k_\beta} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

である．これを (1.2) に代入して，(1.3) を得る．逆に，(1.3) が成り立てば，

$$dx^i_\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^k_\beta} dx^k_\beta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

であるので，

$$g = \sum_{i,j=1}^n g^\alpha_{ij}\, dx^i_\alpha \otimes dx^j_\alpha = \sum_{k,\ell=1}^n g^\beta_{k\ell}\, dx^k_\beta \otimes dx^\ell_\beta \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上}) \tag{1.6}$$

であり，g は局所座標近傍 $(U_\alpha, (x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha))$ の取り方に依らずに定まる．

$(g^\alpha_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ は U_α 上の n 次対称正定値行列に値をもつ C^∞ 関数となる．その行列式を $\det(g)$ と表記する．以下では $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ のように添字 α をしばしば省略して表記する．

1.1.2　曲線の長さ

連続曲線 $\sigma : [a, b] \to M$ が C^1 **曲線**であるとは，十分小さな正数 $\varepsilon > 0$ について，$\sigma(t) \in M$ が $t \in (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ について定義され，任意の $t \in (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ に対し，$\sigma(t)$ のまわりの座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ について，

$$\sigma(t) = (\sigma^1(t), \ldots, \sigma^n(t))$$

と表示するとき，各 $\sigma^i(t)$ が t について C^1 関数であるときをいう．このとき，C^1 曲線の**接ベクトル** $\dot\sigma(t) \in T_{\sigma(t)}M$ が

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\sigma^i(t)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\sigma(t)} \tag{1.7}$$

により定義される．次に，

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 := g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d\sigma^i(t)}{dt} \frac{d\sigma^j(t)}{dt} g_{ij}(\sigma(t)) \tag{1.8}$$

とおくと，$[a,b] \ni t \mapsto \|\dot{\sigma}(t)\|$ は連続関数なので，C^1 曲線 $\sigma : [a,b] \to M$ の**長さ** $L(\sigma)$ が

$$L(\sigma) := \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| \, dt \tag{1.9}$$

により定義される．

C^1 曲線 $\sigma : [a,b] \to M$ の**弧長によるパラメータ化**について述べる．以下では C^1 曲線 $\sigma : [a,b] \to M$ は常に**正則**, すなわち，$\dot{\sigma}(t) \neq 0$ $(\forall\, t \in [a,b])$ と仮定する．曲線 σ の部分弧 $\sigma : [a,t] \to M$ の弧長 $s(t)$ を

$$s(t) := \int_a^t \|\dot{\sigma}(r)\| \, dr \tag{1.10}$$

によって定義する．このとき $s(t)$ の t に関する微分 $s'(t)$ は

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \|\dot{\sigma}(t)\| > 0$$

なので，$s(t)$ は t について狭義単調増加関数である．その逆関数を $t = t(s)$ とすると，曲線 σ の**弧長** s **によるパラメータ化**が

$$\overline{\sigma}(s) := \sigma(t(s)) \qquad (0 \leq s \leq L(\sigma)) \tag{1.11}$$

によって得られる．

このとき，s に関する $\overline{\sigma}$ の微分を $\overline{\sigma}'(s)$ とし，$t'(s) := \frac{dt(s)}{ds}$ とすれば，$\overline{\sigma}'(s) = \frac{d\sigma}{dt}(t(s))\,\frac{dt(s)}{ds}$ なので，任意の s について，

$$\|\overline{\sigma}'(s)\| = t'(s) \left\| \frac{d\sigma}{dt}(t(s)) \right\| = \frac{dt(s)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = 1 \tag{1.12}$$

となる．なお，弧長 s の正定数倍 cs を曲線 σ のパラメータにとることも多い．

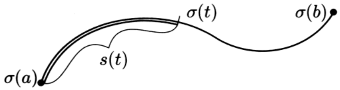


図 1.2　曲線 σ の弧長 $s(t)$

1.1.3　距離

曲線の長さを用いて連結な C^∞ リーマン多様体 (M,g) に距離が定義される：任意の 2 点 $x, y \in M$ に対して，

$$d(x,y) := \inf\{L(\sigma) \mid \sigma \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ区分的な } C^1 \text{ 曲線}\} \tag{1.13}$$

とする．ここで **区分的に C^1 曲線**とは有限個の C^1 曲線をつないでできる連続曲線のことである．M は連結なので $d(x,y)$ は有限値である．このとき，d は距離の 3 公理を満たし，(M,d) は**距離空間**となる：

(1)　$d(x,y) = d(y,x) \qquad (x, y \in M)$,

(2)　$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \qquad (x, y, z \in M)$,

(3)　$d(x,y) > 0\ (x \neq y)$. $d(x,y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る．

さらに 距離空間 (M,d) の位相と多様体 M にある元の位相とは一致する．距離空間として (M,d) が完備のとき，すなわち (M,d) の任意の**コーシー点列** $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ が収束するとき，更に言いかえれば，$d(x_k, x_\ell) \to 0\,(k, \ell \to \infty)$ を満たす点列について $x \in M$ が存在し，$d(x_k, x) \to 0\,(k \to 0)$ のとき，リーマン多様体 (M,g) は**完備**であるという．コンパクト・リーマン多様体は常に完備である．また，

$$0 < \operatorname{diam}(M,g) := \max\{d(x,y) \mid x, y \in M\} < \infty \tag{1.14}$$

をコンパクト・リーマン多様体 (M,g) の**直径** (diameter) という．

1.2 接続

1.2.1 レビ・チビタ接続

n 次元 C^∞ 多様体 (M,g) 上の**ベクトル場** X とは $X_x \in T_xM$ $(x \in M)$ のことである．$\boldsymbol{C^\infty}$ **ベクトル場** X とは，各点 $x \in M$ の局所座標近傍系 $(U_\alpha,(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n))$ $(\alpha \in \Lambda)$ を取り，U_α 上 $X = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ ここで $X_\alpha^i \in C^\infty(U_\alpha)$ $(i=1,\ldots,n,\ \alpha \in \Lambda)$ と表示できるときをいう．別の局所座標系 $(U_\beta,(x_\beta^1,\ldots,x_\beta^n))$ を取り，U_β 上で $X = \sum_{k=1}^n X_\beta^k \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}$ と表すとき，

$$X_\beta^k = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i} \qquad (U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で; } k=1,\ldots,n)$$

が成り立つ．ベクトル場 X の**座標の取り替え公式**と呼ばれる．

さて C^∞ ベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$, M 上の C^∞ 関数全体を $C^\infty(M)$ でそれぞれ表す．$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して，$Xf \in C^\infty(M)$ が局所座標系 $(U,(x^1,\ldots,x^n))$ について $(Xf)(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ $(x \in U)$ により与えられていた．M 上の2つの C^∞ ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，第3のベクトル場 $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^n \left\{X(Y^i) - Y(X^i)\right\} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

により定義できる．このとき，

$$[X,Y]\,f = X(Y\,f) - Y(X\,f) \ (f \in C^\infty(M))$$

が成り立つ．$[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ を X と Y の**ブラケット**という．

C^∞ 多様体 (M,g) の**接続** ∇ とは，写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

で，次の性質を満たすもののことである：

$$\begin{cases} (1) \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ (2) \quad \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ (3) \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \\ (4) \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \end{cases} \tag{1.15}$$

ここで $f \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．このとき次の定理が成り立つ．

定理 1.2 (M, g) を n 次元 C^∞ リーマン多様体とするとき，次式により接続 ∇ を与えることができる (**レビ・チビタ接続**という):

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]). \tag{1.16}$$

ここで $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．このとき，レビ・チビタ接続 ∇ は

(1) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

(2) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$

を満たす．逆に，(1), (2) を満たす接続 ∇ はレビ・チビタ接続に限る．

(1.16) において，任意のベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，$g(X,Y)$ は $g(X,Y)(x) := g_x(X_x, Y_x)$ $(x \in M)$ により定義されている M 上の C^∞ 関数のことである．なお，定理 1.2 の証明は各自試みられたい．

M の局所座標近傍系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を用いて，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U),\ i, j, k = 1, \ldots, n)$$

と表すとき，$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ なので，(1.16) において $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ とするとき，

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\ell}}\right) \tag{1.17}$$

を得る．ここで $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ であり，正定値行列 (g_{ij}) の逆行列を $(g^{k\ell})$ で表す．Γ_{ij}^{k} はレビ・チビタ接続 ∇ の**クリストッフェルの記号**と呼ばれている．

1.2.2　平行移動

M 内の C^1 曲線 $\sigma : [a,b] \to M$ について，X が **$\boldsymbol{\sigma}$ に沿った $\boldsymbol{C^1}$ ベクトル場**であるとは，(1) $X(t) \in T_{\sigma(t)}M$ $(\forall\, t \in [a,b])$ かつ (2) 各点 $\sigma(t)$ における局所座標系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を用いて，

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi^{i}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right)_{\sigma(t)} \in T_{\sigma(t)}M$$

と表すとき，各 $\xi^i(t)$ が t について C^1 関数となるときをいう．このようなベクトル場 X が接続 ∇ について**平行**とは，$\nabla_{\dot\sigma(t)}X = 0$ が成り立つときをいう．

$\sigma(t) = (\sigma^1(t), \ldots, \sigma^n(t))$ と局所表示するとき，(1.7) と (1.15) を使って，$\nabla_{\dot\sigma(t)}X = 0$ が成り立つ必要十分条件は

$$\frac{d\xi^{i}(t)}{dt} + \sum_{j.k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i}(\sigma(t))\,\frac{d\sigma^{j}(t)}{dt}\,\xi^{k}(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.18}$$

となる．曲線 $\sigma : [a,b] \to M$ と点 $x = \sigma(a)$ での X の初期条件 $X(a)$ の係数 $(\xi^1(a), \ldots, \xi^n(a))$ により，1階常微分方程式系 (1.18) の解の存在と一意性により，

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\sigma(t)}X = 0 \qquad (a < t < b) \\[2ex] X(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi^{i}(a)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right)_{\sigma(a)} \end{cases} \tag{1.19}$$

を満たす $\sigma : [a,b] \to M$ に沿った平行なベクトル場 X が一意に定まる．

特に，対応

$$P_\sigma : T_{\sigma(a)}M \ni X(a) \mapsto X(b) \in T_{\sigma(b)}M$$

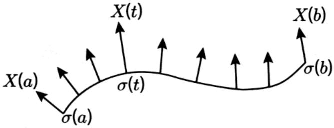


図 1.3　曲線 σ に沿ったベクトル場

が定まる．この対応 $P_\sigma : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ は線形同型であり，

$$g_{\sigma(b)}(P_\sigma(u), P_\sigma(v)) = g_{\sigma(a)}(u, v) \qquad (u,\, v \in T_{\sigma(a)}M) \tag{1.20}$$

を満たす．なぜなら，$u,\, v \in T_{\sigma(a)}M$ に対してこれらを初期ベクトルとする σ に沿った平行なベクトル場を Y, Z とし，X を $X(t) = \dot{\sigma}(t)$ $(t \in [a, b])$ とする．このとき，$\nabla_X Y = 0$ かつ $\nabla_X Z = 0$ なので，

$$\frac{d}{dt}\, g_{\sigma(t)}(Y(t), Z(t)) = X\big(g(Y, Z)\big) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = 0.$$

したがって，$g_{\sigma(t)}(Y(t), Z(t))$ は t について定数となるからである．□

この写像 $P_\sigma : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ を C^1 曲線 $\sigma : [a, b] \to M$ に沿った**平行移動**という．

1.2.3　測地線

M 内の C^1 曲線 $\sigma : [a, b] \to M$ が**測地線**であるとは接ベクトル場 $\dot{\sigma}$ が平行，すなわち $\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma} = 0$ を満たすときをいう．M の局所座標系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を使って, $\sigma(t) = (\sigma^1(t), \ldots, \sigma^n(t)), \dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\sigma^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)}$ と U 上で表示するとき, 条件 $\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma} = 0$ は, (1.18) において $\xi^i(t) = \frac{d\sigma^i(t)}{dt}$ $(i = 1, \ldots, n)$ なので,

$$\frac{d^2\sigma^i(t)}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(\sigma(t))\, \frac{d\sigma^j(t)}{dt}\, \frac{d\sigma^k(t)}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.21}$$

となる．(1.21) は 2 階の常微分方程式系であり，初期条件 $(\sigma^1(a), \ldots, \sigma^n(a))$ と $\left(\frac{d\sigma^1(t)}{dt}(a), \ldots, \frac{d\sigma^n(t)}{dt}(a)\right)$ が与えられると，t が十分 a に近ければ，(1.21)

の解が一意的に存在する．すなわち，任意の点 $p \in M$ と任意の初期ベクトル $u \in T_pM$ が与えられ $|t|$ が小さければ，p を通り u を初期ベクトルにもつ測地線 $\sigma(t)$ が唯一つ存在する．つまり，$\sigma(0) = p$, $\dot{\sigma}(0) = u$ となる測地線 $\sigma(t)$ が一意的に存在する．それを $\sigma(t) = \mathrm{Exp}_p(t\,u) \in M$ と表す．そこで $T_pM \ni u \mapsto \sigma(1) = \mathrm{Exp}_p u \in M$ によって**指数写像**

$$\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$$

が T_pM の 0 の近傍上で定義されている．

各接ベクトル $u \in T_pM$ に対して測地線 $t \mapsto \mathrm{Exp}_p(t\,u)$ が $-\infty < t < \infty$ まで延びるのはいつかということについては次の定理が知られている．

定理 1.3（ホップ・リノウ） (M, g) を連結な C^∞ リーマン多様体とする．次は同値である．

(1) (M, g) は完備である．

(2) 任意の点 $p \in M$ に対して，$\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ が T_pM 全体で定義されている．

したがって，このとき M 上の任意の2点 p, q は長さが $d(p, q)$ の測地線で結ぶことができる．

この定理より任意の連結な C^∞ コンパクト・リーマン多様体 (M, g) について指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ が T_pM 全体で定義されている．

そこで次の定義をする．各点 $p \in M$ に対して，点 p での**単射半径** inj_p を

$$\mathrm{inj}_p := \sup\{r > 0 \,|\, \mathrm{Exp}_p \text{ が } B_r(0_p) \text{ 上で微分同相である}\} \tag{1.22}$$

と定義する．ここで $B_r(0_p) := \{u \in T_pM \,|\, g_p(u, u) < r^2\}$ (p の接空間 T_pM での零ベクトル 0_p を中心とする半径 r のボール) である．このとき

$$\mathrm{inj} = \mathrm{inj}(M) := \inf\{\mathrm{inj}_p \,|\, p \in M\} \tag{1.23}$$

を (M, g) の**単射半径** (injectivity radius) という．連結な C^∞ コンパクト・リーマン多様体 (M, g) については常に $\mathrm{inj} = \mathrm{inj}(M) > 0$ である．

$\{v_i\}_{i=1}^n$ を T_pM の基底とする．このとき $\mathrm{Exp}_p(\sum_{i=1}^n x^i\, v_i) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ は p の近傍上での局所座標を与える．これを p の近傍での**正規座標系**という．

1.3　曲率テンソル

一般に M 上の (r, s) **型テンソル場** T とは，T がベクトル束

$$\overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{r\,個} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}^{s\,個}$$

上の $\boldsymbol{C^\infty}$ **切断**, すなわち，M の局所座標系 $(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ について，T は U_α 上の C^∞ 関数 $T_{\alpha\, j_1\cdots j_s}^{\ \, i_1\cdots i_r}$ を用いて

$$T = \sum T_{\alpha\, j_1\cdots j_s}^{\ \, i_1\cdots i_r} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_r}} \otimes dx_\alpha^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_\alpha^{j_s}$$

と表され，別の局所座標系 $(U_\beta, (x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n))$ においても同様とするとき，$U_\alpha \cap U_\beta\, (\neq \emptyset)$ 上で

$$T_{\alpha\, j_1\cdots j_s}^{\ \, i_1\cdots i_r} = \sum T_{\beta\, \ell_1\cdots \ell_s}^{\ \, k_1\cdots k_r} \frac{\partial x_\alpha^{i_1}}{\partial x_\beta^{k_1}} \cdots \frac{\partial x_\alpha^{i_r}}{\partial x_\beta^{k_r}} \frac{\partial x_\beta^{\ell_1}}{\partial x_\alpha^{j_1}} \cdots \frac{\partial x_\beta^{\ell_s}}{\partial x_\alpha^{j_s}}$$

を満たすときをいう．ただし右辺の和は $k_1, \ldots, k_r, \ell_1, \ldots, \ell_s$ が $\{1, \ldots, n\}$ のすべてに亙るように取る．

$(1,0)$ 型テンソル場はベクトル場で，$(0, s)$ 型の交代テンソル場は s **次微分形式**である．

リーマン多様体 (M, g) のレビ・チビタ接続 ∇ を用いて，$(1,3)$ 型のテンソル場 R が次のように与えられる．$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{1.24}$$

このとき**第一ビアンキの恒等式**と呼ばれている等式

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

が成り立つ．さらに $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(M)$ に対して，

$$R(\alpha X, \beta Y)(\gamma Z) = \alpha \beta \gamma R(X, Y)Z \tag{1.25}$$

が成り立つ．R は**曲率テンソル場**という．(1.25) の性質より，$(R(X,Y)Z)_x \in T_xM$ は接ベクトル $u = X_x$, $v = Y_x$, $w = Z_x \in T_xM$ のみで決まるので，$R(u,v)w = (R(X,Y)Z)_x \in T_xM$ と書くことができる．

M の局所座標系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を用いて，

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{\ell=1}^{n} R^\ell{}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \qquad (1 \leq i,\, j,\, k \leq n)$$

とすると，

$$R^\ell{}_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^\ell_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^\ell_{ki} + \sum_{a=1}^{n} (\Gamma^a_{kj} \Gamma^\ell_{ai} - \Gamma^a_{ki} \Gamma^\ell_{aj})$$

である．

M の各点 $x \in M$ の接空間 T_xM の 1 次独立な系 $\{u,\, v\}$ に対して，

$$K(u,v) := \frac{g(R(u,v)v, u)}{g(u,u)\, g(v,v) - g(u,v)^2}$$

を $\{u,\, v\}$ が定める**断面曲率**という．すべての点 $x \in M$ と T_xM のすべての 1 次独立な系 $\{u,\, v\}$ に対して，$K(u,v) > 0$ (< 0) となるとき，(M,g) は**正曲率** (**負曲率**) であるという．

$\{e_i\}_{i=1}^n$ を (T_xM, g_x) $(x \in M)$ の正規直交基底とするとき，

$$\rho(u) := \sum_{i=1}^{n} R(u, e_i)e_i \qquad (u \in T_xM)$$

により，線形写像 $\rho \colon T_xM \to T_xM$ が定義される．これは T_xM の正規直交基底 $\{e_i\}$ の取り方に依らず，ρ は $(1,1)$ 型テンソル場となる．**リッチ作用素**という．

$$\rho(u,v) = g(\rho(u), v) = g(u, \rho(v)) = \sum_{i=1}^{n} g(R(u, e_i)e_i, v)$$

によって与えられる (0,2) 型対称テンソル場 ρ を**リッチ・テンソル**という．

さらに，$S = \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i, e_i)$ によって定義される M 上の C^∞ 関数を**スカラー曲率**という．これらの定義はいずれも正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ の取り方に依存しない．

1.4　積分

(M,g) を n 次元 C^∞ コンパクト・リーマン多様体とする．M 上の連続関数 f に対する**積分** $\int_M f\, v_g$ を定義しよう．

n 次元 C^∞ リーマン多様体 (M,g) に対して，M の多様体の構造を定める座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ を取り，開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に随伴する**1の分割** $\{\eta_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ を取る．すなわち，

(i)　$\eta_\alpha \in C^\infty(M)$ $(\alpha \in \Lambda)$,

(ii)　$0 \leq \eta_\alpha(x) \leq 1$ $(x \in M,\ \alpha \in \Lambda)$,

(iii)　各 $\alpha \in \Lambda$ に対して，η_α の台 $\mathrm{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$ となる，

(iv)　$\sum_{\alpha\in\Lambda} \eta_\alpha(x) = 1$ $(x \in M)$,

とする．ここで M 上の連続関数 f の **台** $\mathrm{supp}(f)$ とは，$\{x \in M | f(x) \neq 0\}$ の閉包のことである．

さて，台が 1 つの座標近傍系 $(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ に含まれる連続関数 f に対しては，

$$\int_{U_\alpha} f\, v_g := \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}) \sqrt{\det(g)}\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n \tag{1.26}$$

と定義する．ここで $\det(g) := \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right)\right)$ とする．n 次微分形式 $v_g = \sqrt{\det(g)}\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$ を (M,g) の**体積要素**という．M 上の任意の連続関数 f に対する M 上の**積分** $\int_M f\, v_g$ を，

$$\int_M f\, v_g = \int_M \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} \eta_\alpha\right) f\, v_g = \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{U_\alpha} (\eta_\alpha f)\, v_g \tag{1.27}$$

と定義する．ここで (1.27) の右辺の各 U_α 上での積分 $\int_{U_\alpha} (\eta_\alpha f)\, v_g$ は $\eta_\alpha f$ が

U_α 上で連続で $\mathrm{supp}(\eta_\alpha f) \subset U_\alpha$ なので，関数 $\eta_\alpha f$ に対する (1.26) で与える．

2つの M 上の連続関数 f, h に対する L^2 **内積** $(\,,\,)$ と f の L^2 **ノルム**を

$$(f,h) = \int_M f\,h\,v_g, \qquad \|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

で定義する．$f \equiv 1$ の積分 $\mathrm{Vol}(M,g) := \int_M v_g$ を (M,g) の**体積**という．M はコンパクトとしているので，$0 < \mathrm{Vol}(M,g) < \infty$ である．

1.5 ベクトル場の発散とラプラシアン

1.5.1 ベクトル場の発散，勾配ベクトル場，ラプラシアン

M 上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，M 上の C^∞ 関数 $\mathrm{div}(X)$ が次のように定義される（この M 上の C^∞ 関数 $\mathrm{div}(X)$ をベクトル場 X の**発散** (divergent) という）．M 内での局所座標近傍系 $(U,(x^1,\,\ldots,\,x^n))$ を取り，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を U 上の正規直交枠，すなわち $T_xM \ni e_{i\,x}$ $(x \in U)$ は $g_x(e_{i\,x}, e_{j\,x}) = \delta_{ij}$ を満たすとする．これは U 上の各点で一次独立な n 個のベクトル場 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ を U の各点においてグラム・シュミットの方法で正規直交化すると得られる．$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と U 上局所表示するとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(X) &= \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g)}\,X^i\right) \qquad (1.28)\end{aligned}$$

が定義される．この定義は局所座標系 $(U,(x^1,\,\ldots,\,x^n))$ と正規直交枠 $\{e_i\}$ の取り方に依らない．

次に M 上の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して，**勾配ベクトル場** $X = \mathrm{grad}(f) = \nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$g(Y,X) = df(Y) = Yf \qquad (Y \in \mathfrak{X}(M))$$

によって定義される．M 上の局所座標系 $(U,\,(x^1,\,\ldots,\,x^n))$ と U 上の正規直交枠 $\{e_i\}_{i=1}^n$ に関して，

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)\, e_i = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.29}$$

である．ここで $g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big)$ であり，$(g^{k\ell})$ は (g_{ij}) の逆行列である．

余接束 T^*M 上にも計量（同じ記号 g で記す）が

$$g(df_1, df_2) = g(\mathrm{grad}(f_1), \mathrm{grad}(f_2)) = g(\nabla f_1, \nabla f_2) \qquad (f_1,\ f_2 \in C^\infty(M))$$

が成り立つように定義される．ここで $f \in C^\infty(M)$ に対して 1 次微分形式 $df \in \Gamma(T^*M)$ は $df(v) = vf\ (v \in T_xM)$ と定義され，$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i$ を満たす．

以上の準備の下で，$f \in C^\infty(M)$ に対して，f の**ラプラシアン** $\Delta f \in C^\infty(M)$ が次のように定義される．

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g)}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \big\{e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\big\}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

この C^∞ 関数に作用する 2 階線形楕円型偏微分作用素 $\Delta : C^\infty(M) \ni f \mapsto \Delta f \in C^\infty(M)$ を**ラプラシアン**（または**ラプラス作用素**）という．これはリーマン計量 g の取り方に依存するので，そのことを強調するときは Δ_g と記す．

1.5.2　グリーンの公式

次の命題が成立する．

命題 1.4　n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M, g) について次が成り立つ．$f,\ f_1,\ f_2 \in C^\infty(M)$ 及び $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

(1)　$$\int_M f\, \mathrm{div}(X)\, v_g = -\int_M g(\mathrm{grad}(f), X)\, v_g,$$

$$(2)\qquad \int_M (\Delta f_1)\, f_2\, v_g = \int_M g(\nabla f_1, \nabla f_2)\, v_g = \int_M f_1\, (\Delta f_2)\, v_g,$$

$$(3)\qquad \int_M \mathrm{div}(X)\, v_g = 0 \qquad\qquad \text{(グリーンの公式)}.$$

証明 (1) $\nabla_{e_i}(f\,X) = (e_i\,f)\,X + f\,\nabla_{e_i}X$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f\,X) &= \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i}(f\,X)) = \sum_{i=1}^n (e_i f) g(e_i, X) + f\,\sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i}X) \\ &= g(\mathrm{grad}(f), X) + f\,\mathrm{div}(X). \end{aligned} \tag{1.31}$$

(1.31) の両辺を M 上積分すると，(3) より，

$$0 = \int_M \mathrm{div}(f\,X)\, v_g = \int_M g(\mathrm{grad}(f), X)\, v_g + \int_M f\,\mathrm{div}(X)\, v_g.$$

(2) (1) において，$f = f_1$, $X = \mathrm{grad}(f_2)$ とすると，

$$\int_M f_1\,(\Delta f_2)\, v_g = -\int_M f_1\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f_2))\, v_g = \int_M g(\mathrm{grad}(f_1), \mathrm{grad}(f_2))\, v_g.$$

また，$g(\mathrm{grad}(f_1), \mathrm{grad}(f_2)) = g(\mathrm{grad}(f_2), \mathrm{grad}(f_1))$ より，

$$\int_M g(\mathrm{grad}(f_1), \mathrm{grad}(f_2))\, v_g = \int_M (\Delta f_1)\, f_2\, v_g.$$

(3) M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に随伴する 1 の分割 $1 = \sum_{\alpha\in\Lambda}\eta_\alpha$ を使う．各 U_α 上で $X = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ と表す．このとき，

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{div}(X)\, v_g &= \int_M \mathrm{div}(1\cdot X)\, v_g = \int_M \mathrm{div}\left(\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\eta_\alpha\right) X\right) v_g \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda}\int_M \mathrm{div}(\eta_\alpha\, X)\, v_g \qquad \text{(有限和)}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

ここで各 $\alpha\in\Lambda$ に対して，$\mathrm{supp}(\eta_\alpha)\subset U_\alpha$ なので，

$$\int_M \mathrm{div}(\eta_\alpha\, X)\, v_g = \int_{U_\alpha} \mathrm{div}(\eta_\alpha\, X)\, v_g$$

$$= \int_{U_\alpha} \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\sqrt{\det(g)}\, \eta_\alpha\, X_\alpha^i \right) \sqrt{\det(g)}\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{U_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\sqrt{\det(g)}\, \eta_\alpha\, X_\alpha^i \right) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n. \tag{1.33}$$

ここで (1.33) $=0$ となる．なぜなら，各 $\alpha \in \Lambda$ と $i = 1, \ldots, n$ に対して，積分値 $\int_{U_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} (\sqrt{\det(g)}\, \eta_\alpha\, X_\alpha^i)\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$ は $\sqrt{\det(g)}\, \eta_\alpha\, X_\alpha^i$ の U_α の境界値のみで決まるが，$\mathrm{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$ なので，その値は 0 であるからである．□

1.6　微分形式のラプラシアン

n 次元 C^∞ コンパクト・リーマン多様体 (M, g) 上の微分形式に作用するラプラシアンについて述べる．一般にベクトル束 E の C^∞ 切断全体を $\Gamma(E)$ と書く．$0 \leq r \leq n$ に対して，$A^r(M) = \Gamma(\wedge^r T^* M)$ の元 ω を M 上の r 次の**微分形式**という，すなわち，ω は

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega(X_1, \ldots, X_r) \qquad (\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_r)$$

を満たす多重線形写像

$$\omega : \underbrace{TM \times \cdots \times TM}_{r\ 個} \ni (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \omega(X_1, \ldots, X_r) \in C^\infty(M),$$

である．ここで $\mathfrak{S}_r$ は r 個の文字 $\{1, \ldots, r\}$ の置換全体を表し，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である．

次に**外微分** $d : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ を，$\omega \in A^r(M)$ に対して，

$$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1}) \tag{1.34}$$

と定義する．ここで $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$\widehat{X_i}$ はこれを取り除くことを意味する．このとき $d(d\omega) = 0$ であることが確かめられる．

次に，M 上の各点 $x \in M$ について，$\binom{n}{r}$ 次元線形空間 $\bigwedge^r T_x^* M$ 上には M 上のリーマン計量 g より自然に内積が誘導される．これを $\langle\, ,\, \rangle_x$ $(x \in M)$ と書く．このとき，$A^r(M)$ 上の **L^2-内積** $(\, ,\,)$ が

$$(\omega, \eta) = \int_{\{x \in M\}} \langle \omega_x, \eta_x \rangle_x \, v_g \qquad (\omega,\, \eta \in A^r(M)) \tag{1.35}$$

によって与えられる．

このとき，外微分 $d\colon A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ に対する**余微分** $\delta\colon A^{r+1}(M) \to A^r(M)$ とは，

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta) \qquad (\omega \in A^r(M),\ \eta \in A^{r+1}(M))$$

を満たすもののことである．実際，余微分 $\delta\eta \in A^r(M)$ $(\eta \in A^{r+1}(M))$ は

$$(\delta\eta)(X_1, \ldots, X_r) = -\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\eta)(e_i, X_1, \ldots, X_r) \tag{1.36}$$

と与えられる．ここで $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ $(j = 1, \ldots, r)$ である．ここで $\{e_i\}_{i=1}^n$ は (M, g) 上の局所正規直交枠である．(1.36) の右辺に現れる $\nabla_X \eta$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$ は一般に r 次微分形式 $\omega \in A^r(M)$ に対する**共変微分** $\nabla_X \omega \in A^r(M)$ で，

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_r) = X(\omega(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^{r} \omega(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_r)$$

と定義されている．このとき，$\omega \in A^r(M)$ に対して，

$$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i}\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{r+1})$$

が成り立つ．特に，C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ から $\omega(Y) = g(X, Y)$ $(\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M))$ によって1次微分形式 $\omega \in A^1(M)$ を与えるとき，

$$\mathrm{div}(X) = -\delta\omega \tag{1.37}$$

である．

r 次微分形式の空間 $A^r(M)$ に作用する**ラプラシアン**

$$\Delta_r := d\,\delta + \delta\,d:\ A^r(M) \to A^r(M)$$

が定義される．このとき

$$(\Delta_r\omega, \eta) = (d\omega, d\eta) + (\delta\,\omega, \delta\,\eta) \qquad (\omega,\ \eta \in A^r(M)) \tag{1.38}$$

が成り立つ．

$r=0,\ A^0(M) = C^\infty(M)$ のとき，$f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\Delta_0 f = \delta(df) = -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(df)(e_i) = -\sum_{i=1}^n \{e_i(e_i f) - \nabla_{e_i}e_i\, f\} = \Delta f$$

が成り立つ．以下では $\Delta_0 = \Delta$ と書く．

1.7　曲線の長さの第1変分公式と第2変分公式

本節ではリーマン多様体 (M,g) 内の C^∞ 曲線 $c:\ [a,b] \to (M,g)$ の**長さ** $L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,dt$ のよく知られた**第1変分公式**と**第2変分公式**を求める．ここで $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$ $(\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M)$ である．なお第2変分公式と固有値問題への応用は第3章で与えられる．

C^∞ 曲線 $c:\ [a,b] \to M$ が与えられているとき，その**変分**とは，十分小さな正数 $\varepsilon > 0$ について，C^∞ 写像

$$\alpha:\ [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t,s) \mapsto \alpha(t,s) \in M$$

であって，$\alpha(t,0) = c(t)$ $(t \in [a,b])$ となるものをいう．このとき C^∞ 曲線族 $c_s:\ [a,b] \to M$ が $c_s(t) := \alpha(t,s)$ $(t \in [a,b])$ によって与えられ，写像 α は c の**変形**（**変分**）$\{c_s|\ -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ と呼ばれている．このとき，各 $t \in [a,b]$ に対し，曲線 $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni s \mapsto \alpha(t,s) \in M$ の $s=0$ での接ベクトル

$$X(t) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \alpha(t,s) \in T_{c(t)}M \qquad (t \in [a,b])$$

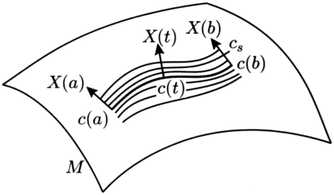


図 1.4 曲線 c の変分と変分ベクトル場 X

が定まる．X は曲線 c に沿った C^∞ ベクトル場となる．X を **変分ベクトル場**という．

逆に, 曲線 c に沿った C^∞ ベクトル場 X (変分ベクトル場) が $X(t) \in T_{c(t)}M$ $(t \in [a,b])$ として与えられたとき，c の変分 $\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で,

$$X(t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \alpha(t,s) \in T_{c(t)}M$$

となるものを作ることができる．例えば,

$$\alpha(t,s) = \mathrm{Exp}_{c(t)}(s\,X(t)) \qquad (s \in (-\varepsilon,\varepsilon),\, t \in [a,b])$$

とすればよい.

さて C^∞ 曲線 $c : [a,b] \to M$ の変分 $\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ が与えられ, c の変分を $\{c_s | -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ とする．このとき，長さの**第 1 変分**

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(c_s)$$

を計算する．曲線 $c = c_0$ のパラメータ t は弧長に比例しているものとし,

$$g_{c(t)}(\dot c(t), \dot c(t))^{\frac{1}{2}} = \|\dot c(t)\| = \ell \qquad (\forall\, t \in [a,b])$$

とする（ここで ℓ は t に依らない定数である)．このとき次の定理が成り立つ.

定理 1.5 **(第 1 変分公式)**

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(c_s) = \ell^{-1} \int_a^b \left\{ \frac{d}{dt}\, g_{c(t)}\bigl(X(t), \dot c(t)\bigr) - g_{c(t)}\bigl(X(t), \nabla_{\dot c(t)} \dot c\bigr) \right\} dt$$

$$= \ell^{-1}\Big\{ g_{c(b)}(X(b), \dot{c}(b)) - g_{c(a)}(X(a), \dot{c}(a)) \Big\}$$

$$- \ell^{-1} \int_a^b g_{c(t)}(X(t), \nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c})\, dt. \tag{1.39}$$

証明　$\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial s}$ をそれぞれ $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 上のベクトル場とみなしたものを T, V, すなわち

$$T_{(t,s)} := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,s)}, \quad V_{(t,s)} := \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(t,s)} \qquad ((t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$$

とする．このとき，曲線 c_s の接ベクトル $\dot{c}_s$ は写像 α の微分 α_* を使い，

$$\dot{c}_s(t) = c_{s*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \alpha_*(T)$$

と書ける．一方，

$$X(t) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \alpha(t, s) = \alpha_*(V)\bigg|_{s=0}$$

である．したがって，

$$\frac{d}{ds} L(c_s) = \int_a^b \frac{d}{ds}\Big\{ g_{c(t)}(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))^{\frac{1}{2}} \Big\}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b g_{c(t)}(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))^{-\frac{1}{2}}\, \frac{d}{ds} g_{c(t)}(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))\, dt \tag{1.40}$$

となる．ここで

$$\frac{d}{ds} g_{c(t)}(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) = V_{(t,s)} g(\alpha_*(T), \alpha_*(T)) = 2\, g(\nabla_V \alpha_*(T), \alpha_*(T)) \tag{1.41}$$

である．一般に $X \in \mathfrak{X}(M)$ と C^∞ 写像 $\varphi\colon M \to N$ に対して $\varphi_*(X)$ とは $\varphi_*(X)(x) := \varphi_{*\,x}(X_x) \in T_{\varphi(x)}N$ $(x \in M)$ のことである．このとき定理 1.2 のレビ・チビタ接続 ∇ の性質 (2) より，

$$\nabla_V \alpha_*(T) - \nabla_T \alpha_*(V) - \alpha_*([V, T]) = 0 \tag{1.42}$$

であり，さらに $\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$ であるので，$[V, T] = 0$. したがって，(1.42) より

$$\nabla_V \alpha_*(T) = \nabla_T \alpha_*(V)$$

が成り立つ．これを (1.41) に代入し，定理 1.2 のレビ・チビタ接続の性質 (1) を用いると，

$$\begin{aligned}(1.41) &= 2\,g(\nabla_T \alpha_*(V), \alpha_*(T)) \\ &= 2\left\{T(g(\alpha_*(V), \alpha_*(T)) - g(\alpha_*(V), \nabla_T \alpha_*(T))\right\} \qquad (1.43)\end{aligned}$$

である．

そこで (1.43) を (1.40) に代入すると，(1.40) は次のように表される．

$$\begin{aligned}(1.40) = \int_a^b g(\alpha_*(T), \alpha_*(T))^{-\frac{1}{2}} &\Big\{T(g(\alpha_*(V), \alpha_*(T))) \\ &- g(\alpha_*(V), \nabla_T \alpha_*(T))\Big\}\, dt \qquad (1.44)\end{aligned}$$

を得る．ここで $s = 0$ とおくと，

$$\alpha_*(T)\big|_{s=0} = \dot{c}(t), \quad \alpha_*(V)\big|_{s=0} = X(t), \quad \nabla_T \alpha_*(T)\big|_{s=0} = \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}$$

なので，(1.44) に $s = 0$ とした式は

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L(c_s) = \ell^{-1} \int_a^b \left\{\frac{d}{dt}\, g_{c(t)}(X(t), \dot{c}(t)) - g_{c(t)}(X(t), \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c})\right\} dt \quad (1.45)$$

となる．これは求める式である．定理 1.5 を得た.□

C^∞ 曲線 $c : [a, b] \to M$ が弧長に比例するパラメータ t の測地線のとき，次の**第 2 変分公式**が知られている（証明は [35], Vol II, p.81. [47], p.124 など）.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} L(c_s) &= \ell^{-1} \int_a^b \left[g(\nabla_{\dot{c}(t)} X^\perp, \nabla_{\dot{c}(t)} X^\perp) - g(R(X^\perp, \dot{c}(t))\dot{c}(t), X^\perp)\right] dt \\ &= -\ell^{-1} \int_a^b g_{c(t)}\Big(\nabla_{\dot{c}(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)} X^\perp) + R(X^\perp, \dot{c}(t))\dot{c}(t), X^\perp\Big)\, dt\end{aligned}$$

$$+\,\ell^{-1}\Big[g(\nabla_{\dot c(t)}X^{\perp}, X^{\perp})\Big]_{t=a}^{t=b}, \tag{1.46}$$

ここで $X^{\perp} := X - \ell^{-1}\, g(X, \dot c(t))\, \dot c(t)$, すなわち，$g(X^{\perp}, \dot c(t)) = 0$ である．

特に，$g(X(t), \dot c(t)) = 0$ $(t \in [a, b])$ を満たすとき，$X(t) = X^{\perp}(t)$ なので，

$$\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} L(c_s) = -\ell^{-1}\int_a^b g_{c(t)}\Big(\nabla_{\dot c(t)}(\nabla_{\dot c(t)}X) + R(X, \dot c(t))\dot c(t), X\Big)\,dt$$

$$+\,\ell^{-1}\Big[g(\nabla_{\dot c(t)}X, X)\Big]_{t=a}^{t=b} \tag{1.47}$$

が成り立つ．測地線 $c(t)$ に沿ったベクトル場 $X(t)$ で，

$$\nabla_{\dot c(t)}(\nabla_{\dot c(t)}X) + R(X, \dot c(t))\dot c(t) = 0 \tag{1.48}$$

を満たすものは**ヤコビ場**と呼ばれている．

第 2 章 ◇ リーマン計量の空間と固有値の連続性

本章では，n 次元多様体 M 上のリーマン計量全体の空間とラプラシアン Δ_g の第 k 固有値 $\lambda_k(g)$ について，$\lambda_k(g)$ をリーマン計量 g の関数とみて，g に関する連続性について考察する．

2.1 実対称行列の固有値

初めにどのようなことを考えるのかをはっきりさせるために，実対称行列の固有値が連続的に変化することを見てみよう．

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の**標準内積** $(\cdot,\cdot)$ とは

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{d} u_i\, v_i = {}^t u\, v, \quad (u = {}^t(u_1,\ldots,u_d),\ v = {}^t(v_1,\ldots,v_d) \in \mathbb{R}^d)$$

であった．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の元はすべて d 次元の縦ベクトルとしていることに注意せよ．また，ノルム $\|\cdot\|$ が

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

と与えられていた．このとき，d 次実対称行列 $A = (a_{ij})$ と $\mathbb{R}^d$ の 2 つの元 $u,\, v \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$(Au,v) = (u,Av) = {}^t u\, Av = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} u_i v_j$$

である．

さて，d 次実対称行列 A に対し，A の**固有値**を**重複度**を込めて大きさの順に

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_d(A)$$

と並べよう．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.1　A, B を 2 つの d 次実対称行列とする．$A \geq B$, すなわち，$A - B \geq 0$, つまり，

$$((A-B)u, u) \geq 0 \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^d)$$

とする（実対称行列 $A - B$ が正定値行列であることを意味する）．このとき，

$$\lambda_k(A) \geq \lambda_k(B) \quad (\forall\, k = 1, \ldots, d). \tag{2.1}$$

証明　（第 1 段）次の最大・最小原理を思い起こそう．

補題 2.2（最大・最小原理）　d 次実対称行列 A の小さい方から数えて第 k 番目の固有値 $\lambda_k(A)$ は次のようにして与えられる：

$\mathbb{R}^d$ 内の任意の k 次元部分空間 L_k について，

$$\Lambda_A(L_k) := \sup_{0 \neq u \in L_k} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \tag{2.2}$$

とおく．このとき次の等式が成立する：

$$\lambda_k(A) = \inf_{L_k} \Lambda_A(L_k). \tag{2.3}$$

ここで上式 (2.3) の右辺は任意の $\mathbb{R}^d$ 内の k 次元部分空間 L_k に亙った $\Lambda_A(L_k)$ の下限を取った量を意味する．

（第 2 段）最大・最小原理を使って，定理を示そう．$A \geq B$, すなわち，

$$(Au, u) \geq (Bu, u) \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^d) \tag{2.4}$$

とする．このとき，(2.4) 式より，$\mathbb{R}^d$ 内の任意の k 次元部分空間 L_k について，

$$\frac{(Au,u)}{\|u\|^2} \geq \frac{(Bu,u)}{\|u\|^2} \quad (\forall\, u \in L_k \backslash \{\mathbf{0}\}) \tag{2.5}$$

が成り立つ．(2.5) 式を (2.2) 式に代入して，

$$\Lambda_A(L_k) \geq L_B(L_k) \tag{2.6}$$

を得る．ゆえに，補題 2.2 より，次式を得る：

$$\lambda_k(A) = \inf_{L_k} \Lambda(L_k) \geq \inf_{L_k} \Lambda_B(L_k) = \lambda_k(B), \tag{2.7}$$

これは求める (2.1) 式である．

（第 3 段）補題 2.2 （最大・最小原理）を証明する．以下，$\lambda_k = \lambda_k(A)$, $\Lambda(L_k) = \Lambda_A(L_k)$ などと記し，下付き A は省略する．

実対称行列 A の固有値はすべて実数であり，重複度を込めて丁度 d 個あり，それらを $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_d$ とする．このとき d 次直交行列 T を選び，

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_d \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

と対角化される．ここで直交行列 T を d 個の d 次列ベクトル $\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ を使って，$T = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$ と表示すると，$\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ は $\mathbb{R}^d$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する正規直交基底，つまり，

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad ただし \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & (i = j) \\ \delta_{ij} = 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

しかも (2.8) より，$Au_i = \lambda_i\, u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ である．

さて，各 $k = 1, 2, \ldots, d$ について，

$L_k^0 := S[u_1, \ldots, u_k]$ （$\{u_1, \ldots, u_k\}$ により生成される $\mathbb{R}^d$ 内の k 次元部分空間）

とする．このとき，

$$\Lambda(L_k^0) = \lambda_k \tag{2.9}$$

となり，したがって，

$$\lambda_k = \Lambda(L_k^0) \geq \inf_{L_k} \Lambda(L_k) \tag{2.10}$$

を得る．実際，(2.10) は (2.9) と下限の定義から従うので，(2.9) を示そう．L_k^0 内の任意の元 $u = \sum_{i=1}^k a_i u_i$ に対して，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k$ に注意すれば，

$$(Au, u) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, {a_i}^2 \leq \lambda_k \, \|u\|^2, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^k {a_i}^2$$

なので，

$$\Lambda(L_k^0) = \sup_{\mathbf{0} \neq u \in L_k^0} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \leq \lambda_k \tag{2.11}$$

となり，しかも，$Au_k = \lambda_k \, u_k$ であるので，(2.11) の不等号は等号成立となるからである．

次に，不等式 (2.10) が等号成立であることを示そう．$\lambda_k > \inf_{L_k} \Lambda(L_k)$ と仮定する．このとき，$\mathbb{R}^d$ 内の k 次元部分空間 L_k で，$\lambda_k > \Lambda(L_k)$ を満たすものが存在する．他方，$\{u_i\}_{i=1}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の基底なので，L_k の任意の元は $u = \sum_{i=1}^d a_i(u) u_i$ と表示でき，しかも $\Lambda(L_k) = \sup_{\mathbf{0} \neq u \in L_k} \frac{(Au,u)}{\|u\|^2}$ なのであるから，

$$\Lambda(L_k) \sum_{i=1}^d a_i(u)^2 \geq \sum_{i=1}^d \lambda_i a_i(u)^2 \tag{2.12}$$

を満たす．ここで集合 $\{\lambda_i | \, i = 1, 2, \ldots, d\}$ を

$$\{\lambda_i | \, i = 1, 2, \ldots, d\} = \{\lambda_i | \, \Lambda(L_k) \geq \lambda_i\} \cup \{\lambda_i | \, \Lambda(L_k) < \lambda_i\}$$

と分割し，(2.12) 式を

$$\sum_{\Lambda(L_k) \geq \lambda_i} (\Lambda(L_k) - \lambda_i) \, a_i(u)^2 \geq \sum_{\Lambda(L_k) < \lambda_i} (\lambda_i - \Lambda(L_k)) \, a_i(u)^2 \tag{2.13}$$

と表しておこう．ここで $\{\lambda_i | \Lambda(L_k) \geq \lambda_i\} \neq \emptyset$ であることに注意する．もし空集合とすれば，$\Lambda(L_k) < \lambda_i \ (\forall i = 1, \ldots, d)$ となるので，(2.12) 式の右辺 $> \Lambda(L_k) \sum_{i=1}^{d} a_i(u)^2$ となり，矛盾を生じるからである．

そこで，

$$m := \max\{i | \lambda_i \leq \Lambda(L_k)\}$$

とおき，線形写像 $\Phi :\ L_k \to \mathbb{R}^d$ を

$$\Phi(u) := \sum_{i=1}^{m} a_i(u)\, u_i \quad \left(u = \sum_{i=1}^{d} a_i(u)\, u_i \in L_k\right)$$

と定義する．このとき，$\dim \Phi(L_k) < k$ である．なぜなら，$i = 1, \ldots, m$ に対しては，$\lambda_i \leq \Lambda(L_k) < \lambda_k$ なので $m < k$ であり，Φ の定義から，$\dim \Phi(L_k) \leq m$ となるからである．

他方，$\Phi : L_k \to \mathbb{R}^d$ は $\dim L_k = k > \dim \Phi(L_k)$ を満たす線形写像であるので，$\Phi(u_0) = 0$ を満たす $\mathbf{0} \neq u_0 \in L_k$ が存在しなければならない．このことは，$\lambda_i \leq \Lambda(L_k)$ である i に対して $a_i(u_0) = 0$ を意味する．このことを (2.13) に代入してみると，$u = u_0$ のとき，(2.13) の左辺 $= 0$ であり，(2.13) 式の右辺の各項は非負であるから，$\Lambda(L_k) < \lambda_i$ について $a_i(u_0) = 0$ となる．したがってすべての $i = 1, \ldots, d$ に対して，$a_i(u_0) = 0$ となり，$u_0 = \sum_{i=1}^{d} a_i(u_0)\, u_i = 0$ となる．これは $u_0 \neq 0$ としたことに反する．ゆえに，(2.10) は等号でなくてはならない．□

定義 2.3　次に $P(d)$ を d 次元正定値実対称行列全体の空間とし，$P(d)$ 上に次のように与えられる**距離** $r(A, B)$ ($A,\ B \in P(d)$) を定義しよう：

$$r(A, B) := \sup_{u \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \inf \left\{ \delta > 0 \,\middle|\, e^{-\delta} < \frac{(Au, u)}{(Bu, u)} < e^{\delta} \right\}. \tag{2.14}$$

ここで (2.14) 式における $\inf\{\delta > 0 | \, e^{-\delta} < \frac{(Au,u)}{(Bu,u)} < e^{\delta}\}$ は $\frac{(Au,u)}{(Bu,u)} \geq 1$ のとき，$\log \frac{(Au,u)}{(Bu,u)}$ に一致し，$\frac{(Au,u)}{(Bu,u)} \geq 1$ のとき，$-\log \frac{(Au,u)}{(Bu,u)}$ に一致する．し

たがって，

$$r(A,B)=\sup_{u\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}}|\log(Au,u)-\log(Bu,u)| \tag{2.15}$$

が成り立つ．また，定義 (2.14) より，A, $B\in P(d)$ に対して，

$$r(A,B)<\delta \quad\Longrightarrow\quad e^{-\delta}A<B<e^{\delta}A. \tag{2.16}$$

これは，d 次正定値行列 C, D について，

$$C<D \quad\Longleftrightarrow\quad (Cu,u)<(Du,u)\ \ (\forall\, u\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\})$$

であることからわかる．

任意の $A,B\in P(d)$ に対して，d 次正則行列 P を選び，${}^tPBP=I_d$ (d 次単位行列) かつ ${}^tPAP=\Lambda_d$ とできる．ここで Λ_d は d 次の対角行列であり，$\Lambda_d=\begin{pmatrix}a_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & a_d\end{pmatrix}$ とする．ここで $a_i>0$ $(j=1,\ldots,d)$ である．（たとえば，佐武一郎『線型代数学』（裳華房）p.166 を見よ）．このとき $u=Pv$ とすれば，

$$(Au,u)=(APv,Pv)=({}^tPAPv,v)=(\Lambda_d\,v,v),$$

$$(Bu,u)=(BPv,Pv)=({}^tPBPv,v)=(I_d\,v,v)=(v,v)$$

となる．それゆえ，

$$\begin{aligned}r(A,B)&=\sup_{v\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}}|\log(\Lambda_d\,v,v)-\log(v,v)|\\&=\sup_{v\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}}\left|\log\left(\frac{\sum_{i=1}^d a_i\,{v_i}^2}{\|v\|^2}\right)\right|\\&=\max_{i=1,\ldots,d}|\log a_i|\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる．

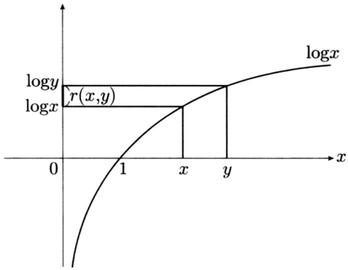


図 2.1　距離 $r(x,y)$

例　$d=1$ のとき，$P(1)=\{x\in\mathbb{R}|\, x>0\}$ 上の距離 $r(x,y)$ は

$$r(x,y)=|\log x-\log y| \quad (x,y\in\mathbb{R},\ x>0,\ y>0) \tag{2.18}$$

で与えられる．

次の命題が成り立つ．

命題 2.4　$(P(d),r)$ は完備距離空間である．

証明　(2.15) 式により，$r(A,B)$ が距離空間としての三公理：(1) $r(A,B)=r(B,A)$, (2) $r(A,B)=0 \iff A=B$, かつ (3) $r(A,B)+r(B,C)\geq r(A,C)$ を満たすことは明らかなので，完備性を示そう．

いま，$\{A_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ を $(P(d),r)$ のコーシー列とする．このとき，$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$; $\ell,\ell'\geq N$ ならば，

$$r(A_\ell,A_{\ell'})=\sup_{u\in\mathbb{R}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}|\log(A_\ell u,u)-\log(A_{\ell'}u,u)|<\varepsilon \tag{2.19}$$

となる．特に，任意の $u\in\mathbb{R}^d\setminus\{\mathbf{0}\}$ に対して，$\{\log(A_\ell u,u)\}_{\ell=1}^\infty$ は数直線 $\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離 $|\cdot|$ に関するコーシー列となり，数列 $\{\log(A_\ell u,u)\}_{\ell=1}^\infty$ は収束する．この値を $\log(Au,u)$ と書く：

$$\log(Au,u)=\lim_{\ell\to\infty}\log(A_\ell u,u).$$

このとき，(Au,u) は正定値二次形式を与えるので，これから定まる実対称行列 A は d 次正定値行列である．さらに，

$$\lim_{\ell\to\infty} r(A_\ell, A) = 0$$

である．実際，(2.19) 式において，$\ell' \to \infty$ とすれば，

$$|\log(A_\ell u, u) - \log(Au, u)| \le \varepsilon$$

となるが，ここで $u \in \mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ は任意なので，$\ell \ge N$ に対して，

$$r(A_\ell, A) = \sup_{u\in\mathbb{R}^d\backslash\{\mathbf{0}\}} |\log(A_\ell u, u) - \log(Au, u)| \le \varepsilon$$

を得るからである．□

定理 2.5 **（固有値の連続性）**　任意の 2 つの $A,\ B \in P(d)$ に対して，$r(A, B) < \delta$ であるならば，

$$e^{-\delta} \le \frac{\lambda_k(A)}{\lambda_k(B)} \le e^{\delta} \quad (k = 1, 2, \ldots, d) \tag{2.20}$$

が成り立つ．すなわち，A と B が互いに十分近ければ，両者の k 番目の固有値の比は 1 に近くなる．

証明　実際，$r(A, B) < \delta$ とすれば，(2.16) 式により，$e^{-\delta} B < A < e^{\delta} B$ となるので，定理 2.1 により，

$$e^{-\delta}\lambda_k(B) \le \lambda_k(A) \le e^{\delta}\lambda_k(B) \quad (k = 1, 2, \ldots, d)$$

となるからである．□

こうして実対称行列の固有値が連続的に変化することが示された．そこで，次節において，リーマン計量 g のラプラシアン Δ_g の k 番目の固有値 $\lambda_k(g)$ が g の変化に応じて連続的に変化することを示そう．

2.2　リーマン計量全体の空間

この節では，与えられたコンパクトで境界はなく，連結，向き付け可能な n 次元 C^∞ 多様体 M 上の**リーマン計量全体の空間** $\mathcal{M}$ を考察し，$\mathcal{M}$ 上に距離を定義し，$\mathcal{M}$ がその距離について完備距離空間となることを示そう．

$S^2(M)$ を M 上の C^∞ **対称共変2テンソル場全体の空間**，すなわち，

$$S^2(M) := \Gamma(S^2T^*M)$$
$$= \{h | h_x \text{ は } T_xM \text{ 上の対称な二次形式で } (x \in M), x \text{ について } C^\infty\}$$

とする．初めに，$S^2(M)$ 上に C^∞ 位相を与える**フレシェ・ノルム** (Fréchet norm) $\|\cdot\|$ を定義する：C^∞ 多様体 M の有限座標近傍系を $\{V_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ とし，さらに有限開被覆 $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ として，各 $\lambda \in \Lambda$ について，U_λ の閉包 $\overline{U_\lambda}$ が V_λ の部分集合となるものを取っておく．各 $h \in S^2(M)$ に対して，h_{ij}^λ を，h の V_λ $(\lambda \in \Lambda)$ 上の座標系 $(x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^n)$ に関する成分，すなわち，$h_{ij}^\lambda = h\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}, \frac{\partial}{\partial x_\lambda^j}\right)$ とする．そこで，各 $k = 0, 1, \ldots$ と U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して，

$$|h|_{k,\lambda} := \sup_{U_\lambda} \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} h_{ij}^\lambda}{\partial (x_\lambda)^\alpha} \right| \tag{2.21}$$

とおく．ここで $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$（各 $\alpha_i\,(i = 1, \ldots, n)$ は非負整数である）について，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ であり，$f \in C^\infty(U_\lambda)$ について，

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial (x_\lambda)^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial (x_\lambda^1)^{\alpha_1} \cdots \partial (x_\lambda^n)^{\alpha_n}} f \tag{2.22}$$

は f の $(x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^n)$ に関する多重偏微分を表す．そこで $\lambda \in \Lambda$ について和を取り，各 $k = 0, 1, \ldots$ について，$S^2(M)$ 上の C^k **ノルム**

$$|h|_k := \sum_{\lambda \in \Lambda} |h|_{k,\lambda} \tag{2.23}$$

が定義される．$|\cdot|_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ は $S^2(M)$ 上のノルムとなる：

(i)　$|ch|_k = |c|\,|h|_k \quad (c \in \mathbb{R},\, h \in S^2(M))$,

(ii)　$|h_1 + h_2|_k \leq |h_1|_k + |h_2|_k \quad (h_1,\, h_2 \in S^2(M))$,

(iii)　$|h|_k \geq 0$　(等号成立は $h = 0$ のときのみ).

今度は，$k = 0, 1, \ldots$ について和を取って，$S^2(M)$ 上の**フレッシェ・ノルム** $\|\cdot\|$

$$\|h\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|h|_k}{1 + |h|_k}, \quad h \in S^2(M) \tag{2.24}$$

が定義される．実際，この和は有限値であり，次が成り立つ：

(i′)　$\|-h\| = \|h\|$,

(ii′)　$\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\| \quad (h_1,\, h_2 \in S^2(M))$,

(iii′)　$\|h\| \geq 0$　(等号成立は $h = 0$ のときのみ).

そこで $S^2(M)$ 上の距離 $\rho'(h_1, h_2)$ $(h_1,\, h_2 \in S^2(M))$ を

$$\rho'(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| \tag{2.25}$$

と定義しよう．

命題 2.6　$(S^2(M), \rho')$ は**完備距離空間**となる，すなわち次が成立する：任意の $h_1,\, h_2,\, h_3 \in S^2(M)$ について，

(1)　$\rho'(h_1, h_2) = \rho'(h_2, h_1)$

(2)　$\rho'(h_1, h_3) \leq \rho'(h_1, h_2) + \rho'(h_2, h_3)$

(3)　$\rho'(h_1, h_2) = 0$ であることと $h_1 = h_2$ とは同値.

(4)　$(S^2(M), \rho')$ における任意のコーシー列は収束する.

証明　実際，(4) を示そう．$\{h_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ を $(S^2(M), \rho')$ のコーシー列とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N > 1$ を選び，$\ell, \ell' \geq N$ ならば，

$$\varepsilon > \|h_\ell - h_{\ell'}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|h_\ell - h_{\ell'}|_k}{1 + |h_\ell - h_{\ell'}|_k} \tag{2.26}$$

が成り立つ．特に，任意の $k = 0, 1, \ldots$ に対して，

$$\varepsilon > \frac{1}{2^k} \frac{|h_\ell - h_{\ell'}|_k}{1 + |h_\ell - h_{\ell'}|_k} \iff \varepsilon > \left(\frac{1}{2^k} - \varepsilon \right) |h_\ell - h_{\ell'}|_k \tag{2.27}$$

となるので，$\varepsilon > 0$ を $\frac{1}{2^{k+1}} > \varepsilon > 0$ を満たすように小さく取っておくと，

$$|h_\ell - h_{\ell'}|_k < \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2^k} - \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}} = 2^{k+1}\varepsilon$$

となる．このことから，各 $k = 0, 1, \ldots$ について，$\{h_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ は $(S^2(M), |\cdot|_k)$ のコーシー列となる．ゆえに，M 上 C^k 級の対称 2-テンソル場 $h(k)$ で，$\lim_{\ell\to\infty} |h_\ell - h(k)|_k = 0$ を満たすものが存在する．このとき，$h(1) = h(2) = \cdots$ でなければばならないので, $S^2(M)$ に属する元を定める．この元を h とおく．このとき，$\lim_{\ell\to\infty} \rho'(h_\ell, h) = 0$ を示す．実際，(2.26) より，各 $K = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\varepsilon > \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|h_\ell - h_{\ell'}|_k}{1 + |h_\ell - h_{\ell'}|_k} \tag{2.28}$$

であるが，$\ell' \to \infty$ とすれば，$\lim_{\ell'\to\infty} |h_\ell - h_{\ell'}|_k = |h_\ell - h|_k$ なので，(2.28) 式より，

$$\varepsilon \geq \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|h_\ell - h|_k}{1 + |h_\ell - h|_k} \tag{2.29}$$

となる．ここで $K = 1, 2, \ldots$ は任意であるので，$K \to \infty$ としてよい．すなわち，任意の $\ell > N$ に対して，$\varepsilon \geq \rho'(h_\ell, h)$ を得た.□

次に，リーマン計量の空間に完備距離を定義しよう．このため，まず，M の各点 $x \in M$ において，集合

$$\begin{aligned} P_x &:= \{\varphi \in S^2(T_x^*M) \,|\, \varphi \text{ は正定値}\} \\ &= \{T_xM \text{ 上の正定値実対称双線形写像全体}\} \end{aligned} \tag{2.30}$$

に完備距離 ρ''_x を定義しよう：$\varphi, \psi \in P_x$ $(x \in M)$ に対して，

$$\rho''_x(\varphi, \psi) := \sup_{v \in T_xM - (0)} \inf \left\{ \delta > 0 \,\middle|\, e^{-\delta} < \frac{\psi(v,v)}{\varphi(v,v)} < e^{\delta} \right\}$$

$$= \sup_{v \in T_xM-(0)} |\log \psi(v,v) - \log \varphi(v,v)| \tag{2.31}$$

とおく．実は，n 次元多様体 M の $x \in M$ での接空間 T_xM の基底を1つ取って $\{v_i\}_{i=1}^n$ とするとき，$P_x \ni \varphi$ に対して，

$$\Phi(\varphi) := (\varphi(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n} \quad (n \text{ 次正定値実対称行列}) \tag{2.32}$$

とおく．このとき，写像 $\Phi: P_x \to P(n)$（ここで $P(n)$ は 2.1 節の $P(d)$ と同じ定義である）は1対1対応であり，

$$\varphi(u,v) = (\Phi(\varphi)u, v) \quad (u, v \in T_xM) \tag{2.33}$$

が成り立つ．実際，$u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $v = \sum_{j=1}^n b_j v_j \in T_xM$ に対して，

$$(\Phi(\varphi)u, v) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \, \varphi(v_i, v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \varphi(u,v).$$

したがって，(2.14), (2.15), (2.31), (2.33) より，

$$\rho_x''(\varphi, \psi) = r(\Phi(\varphi), \Phi(\psi)), \quad \varphi, \psi \in P_x \tag{2.34}$$

を得る．等式 (2.34) は写像 $\Phi: (P_x, \rho_x'') \to (P(n), r)$ が等長写像であることを意味する．よって次の命題を得た．

命題 2.7 距離空間 (P_x, ρ_x'') は完備距離空間である．

そこで，n 次元多様体上の C^∞ リーマン計量全体の空間 $\mathcal{M}$ に次のような距離 ρ を導入しよう．

定義 2.8 (リーマン計量の空間 $\mathcal{M}$ 上の距離)

$$\rho(g_1, g_2) := \rho'(g_1, g_2) + \rho''(g_1, g_2) \tag{2.35}$$

$$\rho''(g_1, g_2) := \sup_{x \in M} \rho_x''((g_1)_x, (g_2)_x) \tag{2.36}$$

ここで ρ' は (2.25) 式によるものとし，$\rho_x''((g_1)_x, (g_2)_x)$ は (2.31) 式によるものとする．

(2.36) 式について計算を進めよう．$x_0 \in M$ の周りの座標系を $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ としたとき，U 上定義された n 個の C^∞ ベクトル場 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ として，U 上の各点 x において

$$(g_2)_x((e_i)_x, (e_j)_x) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

を満たすものとする．また $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ を計量 g_2 に関してグラム・シュミットの方法で正規直交化法して得られる．

このとき，U 上の各点 x において，

$$\rho''_x((g_1)_x, (g_2)_x) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \left| \log \frac{(\Phi(g_1)u, u)}{\|u\|^2} \right| = \max_{i=1,\ldots,n} |\log a_i(x)| \quad (2.37)$$

と与えられる．ただし $\{a_1(x), \ldots, a_n(x)\}$ は U 上定義された n 次正定値対称行列 $\Phi(g_1) = (g_1(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ の n 個の固有値を表す．

命題 2.9 距離空間 $(\mathcal{M}, \rho)$ は完備である．

証明 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ を $(\mathcal{M}, \rho)$ のコーシー列としよう．これは $(S^2(M), \rho')$ と $(\mathcal{M}, \rho'')$ のコーシー列でもある．命題 2.6 より，$(S^2(M), \rho')$ は完備距離空間であるので，$g \in S^2(M)$ で，$\lim_{j\to\infty} \rho'(g_j, g) = 0$ となるものが存在する．特に，任意の $x \in M$, $u, v \in T_xM$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty} (g_j)_x(u, v) = g_x(u, v) \quad (2.38)$$

が成り立つ．他方，$\{g_j\}_{j=1}^\infty$ は ρ'' についてコーシー列であるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適切に $N > 1$ を選び，

$$\rho''_x((g_i)_x, (g_j)_x) \le \rho''(g_i, g_j) < \varepsilon \quad (2.39)$$

が，任意の $i, j \ge N$ と $x \in M$ に対して成り立つようにできる．特に，各 $x \in M$ について，$\{(g_j)_x\}_{j=1}^\infty$ は完備距離空間 (P_x, ρ''_x) のコーシー列でもある．それゆえ収束する．その極限値を $\widetilde{g}_x \in P_x$ とする．(2.31) 式により，$u, v \in T_xM$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty} (g_j)_x(u, v) = \widetilde{g}_x(u, v) \quad (2.40)$$

が成り立っている．(2.38) と (2.40) を合わせて，$g_x(u,v)=\widetilde{g}_x(u,v)$ を得る．$x\in M$, u, $v\in T_xM$ は任意であるので，$\widetilde{g}=g$ を得る．ゆえに $g\in\mathcal{M}$ である．さらに，(2.39) において，$j\to\infty$ とすれば，

$$\rho''_x((g_i)_x, g_x)\le\varepsilon \tag{2.41}$$

が任意の $x\in M$ について成り立つ．ゆえに，$i\ge N$ に対して，

$$\rho''(g_i,g)=\sup_{x\in M}\rho''_x((g_i)_x,g_x)\le\varepsilon \tag{2.42}$$

を得る．これは $\lim_{i\to\infty}\rho''(g_i,g)=0$ を意味する．$\lim_{j\to\infty}\rho'(g_j,g)=0$ と合わせて，$\lim_{j\to\infty}\rho(g_j,g)=0$ を得た.□

2.3 固有値の連続性と重複度の上半連続性

この節では，多様体 M 上の任意のリーマン計量 $g\in\mathcal{M}$ について，(M,g) に対応するラプラシアン Δ_g の k **番目の固有値**を $\lambda_k(g)$ とし，その**重複度**を

$$m_k(g):=\#\{i|\,\lambda_i(g)=\lambda_k(g)\} \tag{2.43}$$

とする．このとき，$\lambda_k(g)$ が $g\in(\mathcal{M},\rho)$ について連続的に変化すること，及び $m_k(g)$ が**上半連続的**に変化することを示そう．

定理 2.10 **(固有値の連続性)**　任意の $\delta>0$ と $g,g'\in\mathcal{M}$ に対して，$\rho(g,g')<\delta$ ならば，

$$e^{-(n+1)\delta}\le\frac{\lambda_k(g)}{\lambda_k(g')}\le e^{(n+1)\delta} \tag{2.44}$$

が任意の $k=1,2,\dots$ に対して成り立つ．つまり，g が g' に近ければ，比 $\frac{\lambda_k(g)}{\lambda_k(g')}$ は $k=1,2,\dots$ について一様に 1 に近い．特に，正数 $\delta>0$ について，g の δ-近傍を $U_\delta(g):=\{g'\in\mathcal{M}|\,\rho(g,g')<\delta\}$ とすれば，$g'\in U_\delta(g)$ ならば，

$$|\lambda_k(g')-\lambda_k(g)|\le(e^{(n+1)\delta}-1)\,\lambda_k(g)\quad(k=1,2,\dots) \tag{2.45}$$

が成り立つ．

注意 2.11　$\delta \to 0$ ならば，$(e^{(n+1)\delta} - 1)\,\lambda_k(g) \to 0$ であるので，(2.45) 式は $\lambda_k(g')$ がいくらでも $\lambda_k(g)$ に近くなることを示しており，k 番目の固有値が連続であることを意味する．

系 2.12（重複度の上半連続性）　$m_k(g)$ は g について上半連続である．すなわち，任意の $g \in \mathcal{M}$ と $k = 1, 2, \ldots$ について，適切な $\delta > 0$ を選び，$g' \in U_\delta(g)$ ならば，

$$m_k(g') \le m_k(g). \tag{2.46}$$

証明　定理 2.10 を仮定し，系 2.12 を証明する．(2.44) 式より，$g' \in U_\delta(g)$ ならば，

$$e^{-(n+1)\delta}\,\lambda_m(g) \le \lambda_m(g') \le e^{(n+1)\delta}\,\lambda_m(g) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.47}$$

となる．そこで $\lambda := \lambda_k(g)$ および $m_k := m_k(g)$ ($\lambda = \lambda_k(g)$ の重複度) とおくと，

$$\begin{aligned} \lambda_1(g) \le \cdots \le \lambda_\ell(g) < \lambda_{\ell+1}(g) = \cdots = \lambda = \cdots = \lambda_{\ell+m_k}(g) \\ < \lambda_{\ell+m_k+1}(g) \le \cdots \end{aligned} \tag{2.48}$$

という状況となっている．ここで

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\,\min\{\lambda - \lambda_\ell(g),\, \lambda_{\ell+m_k+1}(g) - \lambda\} > 0 \tag{2.49}$$

に取っておく．また，

$$\text{(i)} := \frac{2\lambda_{\ell+m_k+1}(g)}{2\lambda_{\ell+m_k+1}(g) - \lambda + \lambda_\ell(g)} > 1,$$

$$\text{(ii)} := \frac{2\lambda_{\ell+m_k+1}(g)}{\lambda_{\ell+m_k+1}(g) + \lambda} > 1,$$

$$\text{(iii)} := \frac{\lambda + \lambda_\ell(g)}{2\lambda_\ell(g)} > 1$$

とおき，

$$\delta := \frac{1}{n+1}\,\min\{\log\,\text{(i)},\, \log\,\text{(ii)},\, \log\,\text{(iii)}\} > 0$$

すなわち,

$$e^{(n+1)\delta} = \min\{(\mathrm{i}),\ (\mathrm{ii}),\ (\mathrm{iii})\} > 1$$

と定める．このとき，不等式 $e^{(n+1)\delta} \leq (\mathrm{i})$ は

$$1 - \frac{\lambda - \lambda_\ell(g)}{2\lambda_{\ell+m_k+1}(g)} \leq e^{-(n+1)\delta}$$

と同等であり，不等式 $e^{(n+1)\delta} \leq (\mathrm{ii})$ は

$$1 - \frac{\lambda_{\ell+m_k+1}(g) - \lambda}{2\lambda_{\ell+m_k+1}(g)} \leq e^{-(n+1)\delta}$$

と同等である．したがって，$e^{(n+1)\delta} \leq \min\left\{(\mathrm{i}),\ (\mathrm{ii})\right\}$ は

$$\begin{aligned}\lambda_{\ell+m_k+1}(g)(1 - e^{-(n+1)\delta}) &\leq \frac{1}{2}\min\{\lambda - \lambda_\ell(g), \lambda_{\ell+m_k+1}(g) - \lambda\} \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{2.50}$$

を意味する．(2.47), (2.50) と ε の定義より，任意の $j \geq \ell + m_k + 1$ について，

$$\begin{aligned}\lambda + \varepsilon &< \lambda_{\ell+m_k+1}(g) - \varepsilon && (\varepsilon \text{ の定義より}) \\ &\leq \lambda_{\ell+m_k+1}(g)\, e^{-(n+1)\delta} && ((2.50) \text{ より}) \\ &\leq \lambda_j(g)\, e^{-(n+1)\delta} \\ &\leq \lambda_j(g') \end{aligned} \tag{2.51}$$

が成り立つ．最後の不等式では (2.47) を使った．

他方，不等式 $e^{(n+1)\delta} \leq (\mathrm{iii})$ と ε の定義より，

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_\ell) \leq \lambda - e^{(n+1)\delta}\,\lambda_\ell(g) \tag{2.52}$$

を得る．したがって，(2.47) と (2.52) より，任意の $j = 1, \ldots, \ell$ に対して，

$$\lambda_j(g') \leq e^{(n+1)\delta}\,\lambda_j(g)$$

$$\le e^{(n+1)\delta}\,\lambda_\ell(g)$$
$$\le \lambda - \varepsilon \tag{2.53}$$

を得る．結局，どのようなことになっているかと言えば，$g' \in U_\delta(g)$ ならば，

(1) $\lambda_j(g') \le \lambda - \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, \ell)$, かつ

(2) $\lambda + \varepsilon \le \lambda_j(g') \quad (\forall\, j \ge \ell + m_k + 1)$

となっている．したがって，$m_k(g') \le m_k(g)$ を得た.□

さて，定理 2.10 の証明に取りかかろう．そのため次の最大・最小原理を示そう．

命題 2.13 (最大・最小原理)　コンパクト・リーマン多様体 (M,g) のラプラス作用素 Δ_g の k 番目の固有値 $\lambda_k(g)$ は次のように特徴づけられる：

$C^\infty(M)$ 内の任意の k 次元線形部分空間 L_k に対して，

$$\Lambda_g(L_k) := \sup_{0 \ne f \in L_k} \frac{\|df\|_g{}^2}{\|f\|_g{}^2} \tag{2.54}$$

とおく．このとき

$$\lambda_k(g) = \inf_{L_k} \Lambda_g(L_k) \tag{2.55}$$

となる．ここで (2.55) 式の右辺は L_k が $C^\infty(M)$ の k 次元部分空間のすべてを亙ったときの $\Lambda_g(L_k)$ の下限を意味する．

ここで (2.54) 式の右辺の分母・分子のノルムについて，その定義を思い起こそう．$C^\infty(M)$ 上の内積 $(\cdot,\cdot)_g$ を

$$(f_1, f_2)_g := \int_M f_1(x)\, f_2(x)\, v_g(x), \quad f_1,\, f_2 \in C^\infty(M) \tag{2.56}$$

と定義し，$\|f\|_g{}^2 = (f,f)_g$ $(f \in C^\infty(M))$ と定義する．ここで $v_g(x)$ はリーマン多様体 (M,g) の標準体積要素であり，M の座標近傍系を $(U,(x^1,\ldots,x^n))$ とするとき，

$$v_g(x) = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n \tag{2.57}$$

と与えられていた．M 上の C^∞ 1-形式の空間 $A^1(M)$ 上の L^2-内積 $(\cdot,\cdot)_g$ を

$$(\omega_1,\omega_2)_g := \int_M \langle\omega_1,\omega_2\rangle_g(x)\, v_g(x), \quad \omega_1,\, \omega_2 \in A^1(M) \tag{2.58}$$

と定義し，$\|\omega\|_g{}^2 = (\omega,\omega)_g$ $(\omega \in A^1(M))$ と定義する．ここで $\langle\omega_1,\omega_2\rangle_g(x)$ $(x \in M)$ は $\omega_i \in A^1(M)$ $(i=1,2)$ の 点 x での計量 g_x に関する内積であり，$(\omega_\ell)_x = \sum_{j=1}^n a_{\ell j}(x)\,(dx_j)_x = \sum_{j=1}^n b_{\ell j}(x)\,(\xi_j)_x$ $(\ell=1,2)$ とするとき，

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle_g(x) := \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x)\, a_{1i}(x)\, a_{2j}(x) = \sum_{j=1}^n b_{1j}(x)\, b_{2j}(x) \tag{2.59}$$

と定義されている．ここで $(\xi_j)_x \in T_x^*M$ $(j=1,\ldots,n)$ は $(e_i)_x \in T_xM$ $(i=1,\ldots,n)$ を (T_xM, g_x) の正規直交基底とするときの双対基底であり，$(\xi_j)_x((e_i)_x) = \delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ を満たすものである．

注意 2.14 通常用いられる**最大・最小原理**は次のようなものであるが，今は用いない： $C^\infty(M)$ の $(k-1)$ 次元部分空間 L_{k-1} に対して，

$$\widetilde{\Lambda}_g(L_{k-1}) := \inf\left\{ \frac{\|df\|_g{}^2}{\|f\|_g{}^2} \,\middle|\, 0 \not\equiv f \in C^\infty(M),\, (f,h)_g = 0\ (\forall\, h \in L_{k-1}) \right\} \tag{2.60}$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

$$\lambda_k(g) = \sup_{L_{k-1}} \widetilde{\Lambda}(L_{k-1}), \tag{2.61}$$

ここで (2.61) 式の右辺は L_{k-1} が $C^\infty(M)$ 内のすべての $(k-1)$ 次元部分空間を亙ったときの $\widetilde{\Lambda}_g(L_{k-1})$ の上限を表す．(2.61) の右辺の上限を実現する $(k-1)$ 次元部分空間 L_{k-1} は $\{u_i\}_{i=1}^{k-1}$ によって生成される部分空間 L_{k-1}^0 である．

証明 命題 2.13 を証明しよう．以下では，下付き添字の g はすべて省略する．さて，ラプラス作用素 Δ のすべての固有値の集合を $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ と表し，対応する固有関数系を $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ と表し，次を満たすものとする：

$$\Delta\, u_k = \lambda_k\, u_k, \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij} \tag{2.62}$$

このとき，任意の $f \in C^\infty(M)$ は

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(f)\, u_k \tag{2.63}$$

と展開される．ここで $x_k(f) \in \mathbb{R}\,(k = 1, 2, \ldots)$ である．

さて，L_k^0 を $\{u_i\}_{i=1}^k$ によって生成される $C^\infty(M)$ 内の k 次元部分空間とする．このとき，$\Lambda(L_k^0) = \lambda_k$ となり，これから下限の定義により直ちに，

$$\lambda_k \geq \inf_{L_k} \Lambda(L_k) \tag{2.64}$$

である．実際，任意の $f = \sum_{i=1}^k a_i\, u_i \in L_k^0$ に対して，

$$\|df\|^2 = (\Delta f, f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, {a_i}^2, \quad \text{かつ}\ \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{k} {a_i}^2 \tag{2.65}$$

である．また，(2.65) より，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k$ と並べていることに注意すれば，容易に

$$\Lambda(L_k^0) = \sup_{0 \not\equiv f \in L_k^0} \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \sup_{\sum_{i=1}^k {a_i}^2 \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i\, {a_i}^2}{\sum_{i=1}^k {a_i}^2} = \lambda_k \tag{2.66}$$

を得る．これから (2.64) を得る．

次に (2.64) 式が等号となることを示す．不等号成立とすると，k 次元部分空間 L_k で，$\lambda_k > \Lambda(L_k)$ となるものが存在する．$\Lambda(L_k) = \sup_{0 \not\equiv f \in L_k} \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2}$ なので，特に，任意の $f \in L_k$ に対して，

$$\Lambda(L_k) \sum_{i=1}^{k} x_i(f)^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x_i(f)^2 \tag{2.67}$$

である．そこで (2.67) 式を

$$\sum_{\Lambda(L_k) \geq \lambda_i} (\Lambda(L_k) - \lambda_i)\, x_i(f)^2 \geq \sum_{\Lambda(L_k) < \lambda_i} (\lambda_i - \Lambda(L_k))\, x_i(f)^2 \tag{2.68}$$

と表しておく．ここで $\{\lambda_i \,|\, \Lambda(L_k) \geq \lambda_i\} \neq \emptyset$ に注意．もし空集合とすれば，$\Lambda(L_k) < \lambda_i$ $(\forall\, i = 1, \ldots, k)$ となるので，

$$(2.67)\text{ 式の右辺} > \Lambda(L_k) \sum_{i=1}^{k} x_i(f)^2$$

となり，矛盾を生じる．そこで

$$m := \max\{i \,|\, \lambda_i \leq \Lambda(L_k)\}$$

とおき，線形写像 $\Phi : L_k \to C^\infty(M)$ を

$$\Phi(f) := \sum_{i=1}^{m} x_i(f)\, u_i \quad \left(f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(f)\, u_i \in L_k\right)$$

と定義する．このとき，$\dim \Phi(L_k) < k$ である．なぜなら，$i = 1, \ldots, m$ に対して，$\lambda_i \leq \Lambda(L_k) < \lambda_k$ なので，$m < k$ であり，Φ の定義から，$\dim \Phi(L_k) \leq m < k$ となるからである．他方，$\Phi : L_k \to C^\infty(M)$ は $L_k = k > \dim \Phi(L_k)$ を満たす線形写像であるので，$\Phi(f_0) = 0$ を満たす $0 \neq f_0 \in L_k$ が存在しなければならない．このことは，$\lambda_i \leq \Lambda(L_k)$ である i に対して，$x_i(f_0) = 0$ を意味する．(2.68) 式を $f = f_0$ に対して考えると，(2.68) 式の左辺 $= 0$ となり，右辺の各項は非負なのであるから，$\Lambda(L_k) < \lambda_i$ のとき $x_i(f_0) = 0$ となる．したがって，

$$f_0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(f_0)\, u_i = \sum_{\lambda_i \leq \Lambda(L_k)} x_i(f_0)\, u_i + \sum_{\Lambda(L_k) < \lambda_i} x_i(f_0)\, u_i \equiv 0.$$

これは $0 \neq f_0$ としていたことに反する．ゆえに，(2.64) 式は等号でなくてはならない．命題 2.13 を得た．□

証明　定理 2.10 を証明する．M 上の 2 つのリーマン計量 g と g' が $\rho(g, g') < \delta$ を満たすとする．このとき M の各点 x において，$\rho''_x(g_x, g'_x) < \delta$ を満たすので，

$$e^{-\delta} g'_x < g_x < e^{\delta} g'_x \tag{2.69}$$

である．したがって，局所座標近傍系 $(U,(x^1,\dots,x^n))$ に対して，

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right),\quad g'_{ij} := g'\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

とおくと，(2.69) より，

$$(e^{-\delta}\,g'_{ij})_{ij=1,\dots,n} < (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n} < (e^{\delta}\,g'_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \tag{2.70}$$

を満たす．したがって，行列式と逆行列についても下記の関係式を満たす（例えば，佐武一郎『線型代数学』裳華房，p.166 を見よ）：

$$e^{-n\,\delta}\,\det({g'}_{ij}) < \det(g_{ij}) < e^{n\,\delta}\,\det({g'}_{ij}) \tag{2.71}$$

$$(e^{-\delta}\,{g'}^{ij})_{i,j=1,\dots,n} < (g^{ij})_{i,j=1,\dots,n} < (e^{\delta}\,{g'}^{ij})_{i,j=1,\dots,n} \tag{2.72}$$

これから，$f\in C^\infty(M)$ と $\omega\in A^1(M)$ が $\mathrm{supp}(f)\subset U$, $\mathrm{supp}(\omega)\subset U$ を満たすならば，

$$e^{-\frac{n}{2}\,\delta}\,{\|f\|_{g'}}^2 \le {\|f\|_g}^2 \le e^{\frac{n}{2}\,\delta}\,{\|f\|_{g'}}^2 \tag{2.73}$$

$$e^{-(\frac{n}{2}+1)\delta}\,{\|\omega\|_{g'}}^2 \le {\|\omega\|_g}^2 \le e^{(\frac{n}{2}+1)\,\delta}\,{\|\omega\|_{g'}}^2 \tag{2.74}$$

を得る．実際，(2.73) は (2.71) より，

$$\begin{aligned} e^{-\frac{n}{2}\,\delta}\int_U f^2\sqrt{\det({g'}_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n &\le \int_U f^2\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n \\ &\le e^{\frac{n}{2}\,\delta}\int_U f^2\sqrt{\det({g'}_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n \end{aligned} \tag{2.75}$$

を得るからである．(2.74) は，$\omega=\sum_{i=1}^n \omega_i\,dx^i$ とすると，(2.71) と (2.72) より，

$$e^{-(\frac{n}{2}+1)\,\delta}\int_U\left(\sum_{i,j=1}^n {g'}^{ij}\,\omega_i\,\omega_j\right)\sqrt{\det({g'}_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n$$

$$\leq \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\, \omega_i\, \omega_j \right) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n$$

$$\leq e^{(\frac{n}{2}+1)\,\delta} \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n {g'}^{ij}\, \omega_i\, \omega_j \right) \sqrt{\det({g'}_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n \qquad (2.76)$$

となるからである．したがって，1 の分割 (1.4 節) を用いて，(2.73) と (2.74) は任意の $f \in C^\infty(M)$ と $\omega \in A^1(M)$ について成立する．このことから，任意の $0 \not\equiv f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$e^{-(n+1)\,\delta}\, \frac{{\|df\|_{g'}}^2}{{\|f\|_{g'}}^2} \leq \frac{{\|df\|_g}^2}{{\|f\|_g}^2} \leq e^{(n+1)\,\delta}\, \frac{{\|df\|_{g'}}^2}{{\|f\|_{g'}}^2} \qquad (2.77)$$

が成り立つ．ゆえに，任意の $C^\infty(M)$ 内の k 次元部分空間 L_k に対して，

$$e^{-(n+1)\,\delta}\, \Lambda_{g'}(L_k) \leq \Lambda_g(L_k) \leq e^{(n+1)\,\delta}\, \Lambda_{g'}(L_k)$$

を得るので，命題 2.13（最大・最小原理）より，求める不等式

$$e^{-(n+1)\,\delta}\, \lambda_k(g') \leq \lambda_k(g) \leq e^{(n+1)\,\delta}\, \lambda_k(g')$$

を得た.□

2.4　固有値の一般的性質

本節では，前節までの結果の応用として，“すべての固有値の重複度が 1 であるリーマン計量の族が，リーマン計量全体の空間の中で**一般的な位置**を占める”というちょっと奇妙な定理について述べる．定理を正確に述べるため，最初に余り聞き慣れない様々な言葉を用意する．

定義 2.15　位相空間 X の部分集合 S が**残留集合** (residual set) であるとは，S が X 内の加算個の開かつ稠密な部分集合の共通部分となるときをいう．位相空間 X が**ベール (Baire) 空間**であるとは，X の任意の残留集合が

X で稠密となるときをいう．位相空間 X の部分集合 A が**疎集合**であるとは，A の閉包 $\overline{A}$ の X での補集合が X で稠密であるとき，すなわち $\overline{A}$ が内点をもたないときをいう．X の集合が**第1類**であるとは，高々加算個の疎集合の和集合として表されるときをいい，そうでない集合を**第2類**という．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ 内の有理数全体の集合は第1類であり，無理数全体の集合は第2類である．

命題 2.16（ベールの定理）　完備距離空間 (X,d) はベール空間である．ベール空間の任意の残留集合は第2類である．

次の定理を示したい．

定理 2.17（**K. Uhlenbeck, 谷川政雄**）　M を2次元以上のコンパクト連結（向き付け可能）C^∞ 多様体とする．$(\mathcal{M},\rho)$ を2.2節の M 上のリーマン計量全体の空間のなす完備距離空間とする．$\mathcal{M}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ を，M 上のリーマン計量 g で，ラプラス作用素 Δ_g のすべての固有値 $\lambda_k(g)$ の重複度 $m_k(g)$ が1であるもの全体とする．このとき，集合 $\mathcal{S}$ は $(\mathcal{M},\rho)$ の残留集合である．

次の定理が成り立つ：

定理 2.18（**D.G. Ebin**）　定理2.17と同じ設定の下で，$\mathcal{I} := \{g \in \mathcal{M} | \dim(\mathrm{Iso}(M,g)) = 0\}$, すなわち，$\mathcal{I}$ は等長変換群が離散的なリーマン計量 g 全体の集合とする．このとき，$\mathcal{S} \subset \mathcal{I}$ となる．

注意 2.19　(1) $\dim M = 1$ のときには，定理2.17のようなことは起こらない．実際，すべての1次元リーマン多様体 (M,g) は標準的1次元球面 $(S^1, c\,g_0)$（c は正定数）と等長的であり，このラプラス作用素のすべての零でない固有値は重複度2であり，$\mathcal{S} = \mathcal{I} = \emptyset$ である．

(2) 定理2.18は $\dim M \geq 2$ のとき，“等長変換群が離散的となる M 上のリーマン計量が一般的である” ことを示している．

証明　定理 2.18 の証明は概略のみ示そう．Δ_g の相異なる固有値全体を

$$\lambda_1'(g) = 0 < \lambda_2'(g) < \lambda_3'(g) < \cdots \tag{2.78}$$

とし，それらの重複度を $m_k'(g)$ $(k=1,2,\ldots)$ とする．すなわち，V_k を Δ_g の固有値 $\lambda_k'(g)$ の固有空間とすると，$m_k'(g) = \dim V_k$ である．

他方，Δ_g のすべての固有値を重複度を込めて並べたものを

$$\lambda_1(g) \leq \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \tag{2.79}$$

とし，Δ_g の対応する固有関数の集合を $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ とし，

$$\Delta_g\, u_i = \lambda_i\, u_i, \quad (u_i, u_j)_g = \delta_{ij},$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i)_g\, u_i(x) \quad (\forall\, f \in C^\infty(M),\, x \in M)$$

とする．このとき，十分大きな $r > 1$ を選び，$N := m_1'(g) + m_2'(g) + \cdots + m_r'(g)$ とおいて，C^∞ 写像 $\iota : M \to \mathbb{R}^N$

$$\iota : M \ni x \mapsto \iota(x) := (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)) \in \mathbb{R}^N \tag{2.80}$$

が M の $\mathbb{R}^N$ への埋め込みとなるようにできる．$G := \mathrm{Iso}(M,g)$ を (M,g) の等長変換群とすると，G は $C^\infty(M)$ に次のように作用する：

$$(\Phi^* u)(x) := u(\Phi^{-1}(x)) \quad (\Phi \in G,\, u \in C^\infty(M),\, x \in M). \tag{2.81}$$

この作用は次の性質を満たす作用である．任意の $\Phi \in G$ に対して，$\Phi^* : C^\infty(M) \ni u \mapsto \Phi^* u \in C^\infty(M)$ は線形写像であり，

$$\begin{cases} (\Phi^* u, \Phi^* v)_g = (u, v)_g \quad (u, v \in C^\infty(M)) \\ \Phi_1^*(\Phi_2^* u) = (\Phi_1 \circ \Phi_2)^* u \quad (\Phi_1,\ \Phi_2 \in G,\ u \in C^\infty(M)) \\ \Delta_g(\Phi^* u) = \Phi^*(\Delta_g u) \quad (\Phi \in G,\ u \in C^\infty(M)) \end{cases}$$

を満たす．特に，

$$\Phi^*(V_k) \subset V_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.82}$$

である．$V := V_1 + \cdots + V_r$ とすると，内積 $(\cdot,\cdot)_g$ によって $(V, (\cdot,\cdot)_g)$ は N 次元ユークリッド空間となる．$O(V)$ をその直交変換群とする．このとき上記より，

$$\iota^* : G \ni \Phi \mapsto \Phi^* \in O(V) \tag{2.83}$$

はリー群準同型であるが，さらに中へのリー群同型となる．実際，$\Phi, \Phi' \in G$ が $\Phi^* = \Phi'^*$ とすれば，任意の $u \in V$ と $x \in M$ に対して，

$$u(\Phi^{-1}(x)) = (\Phi^* u)(x) = (\Phi'^* u)(x) = u(\Phi'^{-1}(x)) \tag{2.84}$$

となる．ゆえに，$\iota(\Phi^{-1}(x)) = \iota(\Phi'^{-1}(x))$ である．ι は埋め込みとしているので，$\Phi^{-1}(x) = \Phi'^{-1}(x)$ ($\forall\, x \in M$)．これから $\Phi = \Phi'$ を得るからである．

さて，ここで $g \in \mathcal{S}$ とする．このとき，$\dim V_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ である．このとき，$\Phi^* u_k \in V_k$ かつ $\dim V_k = 1$ なので，$\Phi^* u_k = \nu\, v_k$ $(\nu \in \mathbb{R})$ となる．このとき，

$$\nu^2\,(u_k, u_k) = (\Phi^* u_k, \Phi^* u_k) = (u_k, u_k)$$

となるので，$\nu^2 = 1$ となり，$\nu = \pm 1$ となる．すなわち，

$$\Phi^* u_k = \pm\, u_k \quad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.85}$$

である．このことは，V の基底 $\{u_1, \ldots, u_N\}$ を用いて，$\iota^*(G)$ の各元 Φ^* が

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & O \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

と行列表示されていることを意味し，$\iota^*(G)$ は離散的で，$\iota^* : G \to \iota^*(G)$ はリー群同型であるので，$G = \mathrm{Iso}(M, g)$ も離散的で，$\dim(G) = 0$ である．□

定理 2.17 は次の順序で示される．

$\mathcal{S}_1 = \mathcal{M}$ とし，$k = 2, 3, \ldots$ に対して，

$$\mathcal{S}_k := \{g \in \mathcal{M} \,|\, 0 = \lambda_1(g) < \lambda_2(g) < \cdots < \lambda_{k-1}(g) < \lambda_k(g)\}$$

すなわち，$\mathcal{S}_k$ は Δ_g の最初の $k-1$ 個の固有値の重複度が 1 であるようなリーマン計量 g 全体の空間とする．このとき，

$$\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3 \supset \cdots \supset \mathcal{S}_k \supset \cdots \supset \mathcal{S} \tag{2.87}$$

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k \tag{2.88}$$

となっている．このとき，次の定理を示せばよい．

定理 2.20 (1) 各 $\mathcal{S}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ は $(\mathcal{M},\rho)$ で開集合である．

(2) 各 $k=1,2,\ldots$ について，$\mathcal{S}_{k+1}$ は $\mathcal{S}_k$ において，$\mathcal{M}$ の距離 ρ に関して稠密である．

証明 定理 2.20 (1) を証明する．$g \in \mathcal{S}_k$ とする．このとき，

$$0 = \lambda_1(g) < \lambda_2(g) < \cdots < \lambda_{k-1}(g) < \lambda_k(g) \leq \lambda_{k+1}(g) \leq \cdots \tag{2.89}$$

である．そこで

$$\varepsilon := \min\{\lambda_{j+1}(g) - \lambda_j(g) \,|\, j = 1,2,\ldots,k-1\} > 0 \tag{2.90}$$

とおき，正数 $\delta > 0$ を

$$e^{(n+1)\delta} < \frac{\varepsilon}{2\,\lambda_k(g)} + 1 \tag{2.91}$$

が成り立つように十分小さく取っておく．このとき，$g' \in U_\delta(g)$ ならば，$g' \in \mathcal{S}_k$ が成り立つことを示そう．

実際，$g' \in U_\delta(g)$ に対して，(2.45) 式より，$j=1,2,\ldots,k-1$ に対して，

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \lambda_{j+1}(g) - \lambda_j(g) \\
&\leq |\lambda_{j+1}(g) - \lambda_{j+1}(g')| + |\lambda_{j+1}(g') - \lambda_j(g')| + |\lambda_j(g') - \lambda_j(g)| \\
&\leq (e^{(n+1)\delta} - 1)\,(\lambda_{j+1}(g) + \lambda_j(g)) + |\lambda_{j+1}(g') - \lambda_j(g')| \\
&\leq 2(e^{(n+1)\delta} - 1)\,\lambda_k(g) + |\lambda_{j+1}(g') - \lambda_j(g')|.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

ここで δ の取り方と (2.92) より，$j=1,2,\ldots,k-1$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon - 2\,(e^{(n+1)\delta}-1)\,\lambda_k(g) \\ &\le |\lambda_{j+1}(g')-\lambda_j(g')| \\ &= \lambda_{j+1}(g')-\lambda_j(g') \end{aligned} \tag{2.93}$$

を得る．ゆえに，$g' \in \mathcal{S}_k$ を得た．つまり，$U_\delta(g) \subset \mathcal{S}_k$ となるので，$\mathcal{S}_k$ は $(\mathcal{M},\rho)$ の開集合である.□

定理 2.20 (2) を示そう．そのためには次の5つの補題が必要である．これらの補題は，それ自体重要な結果である．

補題 2.21（ラプラス作用素の共形変換公式） $g \in \mathcal{M}$, $a \in C^\infty(M)$ $(a>0)$ とする．このとき，

(1) $ag \in \mathcal{M}$ に対するレビ・チビタ接続 ∇^{ag} は次の性質を満たす：f, $h \in C^\infty(M)$, X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\begin{aligned} 2\nabla^{ag}_{fX}(hY) &= 2fh\nabla^g_X Y - fh\,g(X,Y)\,\frac{1}{a}\,\nabla^g a \\ &\quad + \left(fh\,\frac{Xa}{a} + 2f\,(Xh)\right)Y + fh\,\frac{Ya}{a}\,X. \end{aligned} \tag{2.94}$$

(2) ラプラス作用素 Δ_{ag} は次のように表示される：

$$\Delta_{ag} = a^{-1}\,\Delta_g - \frac{n-2}{2}\,a^{-2}\,\nabla^g a, \tag{2.95}$$

ここで $\nabla^g a$ は g に関する関数 a の勾配ベクトル場 (1.5 節) を表す．つまり

$$\nabla^g a = \sum_{i=1}^n e_i(a)\,e_i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\,\frac{\partial a}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.96}$$

ここで $\{e_i\}_{i=1}^n$ は (M,g) 上の局所正規直交枠であり，局所座標 $(x^1,\ldots,x^n)$ について，$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ とし，$(g^{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ は $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ の逆行列である．

証明　(1) $g' = ag$, $U := fX$, $V := hY$ に対して,

$$
\begin{aligned}
2g'(\nabla^{g'}_U V, Z) &= U(g'(V,Z)) + V(g'(Z,U)) - Z(g'(U,V)) \\
&\qquad + g'(Z,[U,V]) + g'(V,[Z,U]) - g'(U,[V,Z]) \\
&= afh\Big\{X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\
&\qquad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\Big\} \\
&\quad + g(X,Y)\{-Z(afh) + ah(Zf) + fa(Zh)\} \\
&\quad + g(Y,Z)\{fX(ah) + af(Xh)\} \\
&\quad + g(Z,X)\{hY(af) - ah(Yf)\} \\
&= 2afh\, g(\nabla^g_X Y, Z) - fh(Za)\, g(X,Y) \\
&\quad + \{fh(Xa) + 2af(Xh)\}\, g(Y,Z) + fh(Ya)\, g(X,Z).
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

これから, (2.96) 式を用いて,

$$
\begin{aligned}
2\,\nabla^{ag}_{fX}(hY) &= 2fh\,\nabla^g_X Y - fh\, g(X,Y)\,\frac{1}{a}\,\nabla^g a \\
&\qquad + \left(fh\frac{1}{a}\,Xa + 2f(Xh)\right) Y + fh\frac{Ya}{a}\,X.
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

(2) 特に, $f = h = a^{-\frac{1}{2}}$ のとき, (2.98) は

$$
2\nabla^{ag}_{a^{-\frac{1}{2}}X}(a^{-\frac{1}{2}}Y) = 2a^{-1}\nabla^g_X Y - a^{-2}\,g(X,Y)\,\nabla^g a + a^{-2}\,(Ya)\,X. \tag{2.99}
$$

(2.99) 式を使い, $u \in C^\infty(M)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ag} u &= -\sum_{i=1}^n \left\{a^{-\frac{1}{2}}e_i(a^{-\frac{1}{2}}e_i u) - \nabla^{ag}_{a^{-\frac{1}{2}}e_i}(a^{-\frac{1}{2}}e_i)u\right\} \\
&= a^{-1}\,\Delta_g u - \frac{n-2}{2}\,a^{-2}\,(\nabla^g a)u
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

となり, (2) を得た. □

補題 2.22 （有用な諸公式）　M 上の C^∞ リーマン計量 $g \in \mathcal{M}$ に対して，次の関係式が成立する．
(1) $\sigma,\ f_1,\ f_2 \in C^\infty(M)$ に対して，

$$((\nabla^g \sigma) f_1, f_2)_g = (\sigma, \delta(f_2\, df_1)\,)_g, \tag{2.101}$$

ここで δ はリーマン計量 g に関する余微分を表す．
(2)

$$\delta(f_2 df_1) = -\langle df_1, df_2\rangle_g + f_2(\Delta_g f_1), \tag{2.102}$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ は T_x^*M $(x \in M)$ における g に関する内積であり，また (2.101) 式における $(\cdot,\cdot)_g$ は $L^2(M)$ における g に関する L^2 内積を表す．
(3) $u,\ v \in C^\infty(M)$ が Δ_g の同じ固有値 λ の固有関数とすると，

$$\delta(u\, dv) = \delta(v\, du). \tag{2.103}$$

証明　(1) $(\nabla^g\sigma)f_1 = \langle d\sigma,\ df_1\rangle_g$ より，

$$\begin{aligned}
((\nabla^g\sigma)\, f_1, f_2)_g &= (\langle d\sigma,\ df_1\rangle_g, f_2)_g \\
&= \int_M \langle d\sigma,\ df_1\rangle_g(x)\, f_2(x)\, v_g(x) \\
&= \int_M \langle d\sigma,\ f_2\, df_1\rangle_g(x)\, v_g(x) \\
&= (d\sigma,\ f_2\, df_1)_g \\
&= (\sigma, \delta(f_2\, df_1)\,)_g
\end{aligned} \tag{2.104}$$

(2.101) 式を得た．
　(2) $\omega \in A^1(M)$ に対し，$\delta\omega = -\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}\omega)(e_i)$ より，

$$\begin{aligned}
\delta(f_2\, df_1) &= -\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(f_2\, df_1))(e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^n \{e_i(f_2)\, e_i(f_1) + f_2\, (\nabla_{e_i}(df_1))(e_i)\}
\end{aligned}$$

$$= -\langle df_1, df_2 \rangle_g - f_2\, \delta(df_1) \tag{2.105}$$

ここで $\Delta_g f_1 = -\delta(df_1)$ なので，(2.105) 式より，(2.102) 式を得る．

(3) 同じ固有値 λ の固有関数 u, v に対して，(2) より，

$$\begin{aligned} \delta(u\,dv) &= -\langle du, dv \rangle_g + v\,\Delta_g u \\ &= -\langle du, dv \rangle_g + \lambda\, uv \\ &= \delta(v\,du). \end{aligned} \tag{2.106}$$

□

次に，M. Berger ([4]) によって与えられたリーマン計量の変形に対するラプラス作用素の固有値と固有関数に対する公式を述べる．証明は S. Bando and H. Urakawa ([3]) の p.164 及び p.168–171 を見よ．

補題 2.23（リーマン計量の実解析的変形と固有値，固有関数） リーマン計量 $g \in \mathcal{M}$ と対称 2 テンソル $h \in S^2(M)$ に対して，次のような g の変形 $g(\tau)$ を取る：

$$g(\tau) := g + \tau\, h \in \mathcal{M} \qquad (\varepsilon < \tau < \varepsilon)$$

ただし $\varepsilon > 0$ は十分小とする．またラプラス作用素 Δ_g の任意の固有値を $\lambda > 0$ とし，その重複度を $\ell \geq 1$ とする．このとき，次の 4 条件を満たす正数の族 $\Lambda_i(\tau)$ と M 上の C^∞ 関数の族 $u_i(\tau) \in C^\infty(M)$ $(i = 1, \ldots, \ell;\ -\varepsilon < \tau < \varepsilon)$ が存在する．

(1) 各 $\Lambda_i(\tau)$ と $u_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ は τ $(-\varepsilon < \tau < \varepsilon)$ について実解析的に依存する．

(2) $\Delta_{g(\tau)} u_i(\tau) = \Lambda_i(\tau)\, u_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, \ell;\ -\varepsilon < \tau < \varepsilon)$.

(3) $\Lambda_i(0) = \lambda$ $(i = 1, \ldots, \ell)$.

(4) $\{u_i(\tau)\}_{i=1}^{\ell}$ はリーマン計量 $g(\tau)$ に関する L^2 内積 $(\cdot, \cdot)_{g(\tau)}$ に関して正規直交系となる（ただし $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$ とする）．

さて，リーマン計量 $g \in \mathcal{M}$ に対し次のような共形変形を考え，固有値と固有関数がどのように分離するかを調べよう．M 上の C^∞ 関数 σ に対して，

$$g(\tau) := (1+\tau\,\sigma)\,g \in \mathcal{M} \quad (-\varepsilon < \tau < \varepsilon) \tag{2.107}$$

とする．ここで $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ は σ に依存する十分小さな正数である．そこで，g のラプラス作用素 Δ_g の任意の正の固有値 $\lambda > 0$ を取り，その重複度を ℓ とし，その固有関数で正規直交系をなすものを $\{u_i\}_{i=1}^{\ell}$ とする：

$$\Delta_g\,u_i = \lambda\,u_i, \quad (u_i, u_j)_g = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,\ldots,\ell).$$

補題 2.23 における正数の族 $\Lambda_i(\tau)$ と $u_i(\tau) \in C^\infty(M)$ $(i = 1,\ldots,\ell; -\varepsilon < \tau < \varepsilon)$ を次のように表示する．

$$\Lambda_j(\tau) = \lambda + \tau\,\alpha_j + \tau^2\,\beta_j(\tau) \quad (-\varepsilon < \tau < \varepsilon) \tag{2.108}$$

ここで $\alpha_j \in \mathbb{R}$ は定数であり，$\beta_j(\tau) \in \mathbb{R}$ は τ について実解析的である．

$$u_j(\tau) = u_j + \tau\,v_j + \tau^2\,w_j(\tau) \quad (-\varepsilon < \tau < \varepsilon) \tag{2.109}$$

ここで $v_j \in C^\infty(M)$ であり，$w_j(\tau) \in C^\infty(M)$ は τ について実解析的である．

補題 2.24　次が成り立つ．

$$\left(\left(\frac{2-n}{2}\,\nabla^g\sigma - \lambda\,\sigma \right) u_j, u_i \right)_g = \alpha_j\,\delta_{ij} \quad (1 \le i,j \le \ell) \tag{2.110}$$

証明　$g(\tau) = a(\tau)\,g$, $a(\tau) := 1 + \tau\,\sigma$ $(-\varepsilon < \tau < \varepsilon)$ とおく．補題 2.23 (2) と補題 2.21 (2) より，

$$\begin{aligned} \Lambda_j(\tau)\,u_j(\tau) &= \Delta_{g(\tau)}\,u_j(\tau) \\ &= a(\tau)^{-1}\,\Delta_g\,u_j(\tau) + \frac{2-n}{2}\,a(\tau)^{-2}\,\nabla^g a(\tau)\,u_j(\tau) \end{aligned}$$

この両辺に $a_j(\tau)^2$ を掛けると，$\nabla^g a(\tau) = \tau\,\nabla^g\sigma$ なので，

$$a(\tau)\,\Delta_g u_j(\tau) + \frac{2-n}{2}\,\tau\,\nabla^g\sigma\,u_j(\tau) - \Lambda_j(\tau)\,a(\tau)^2\,u_j(\tau) = 0 \tag{2.111}$$

$$(1 \le j \le \ell;\ -\varepsilon < \tau < \varepsilon)$$

を得る．ここで (2.111) 式の両辺を $\tau=0$ で τ について微分して，

$$\sigma\,\Delta_g u_j+\Delta_g v_j+\frac{2-n}{2}\,\nabla^g\sigma\,u_j-\alpha_j u_j-2\,\lambda\,\sigma\,u_j-\lambda\,v_j=0 \qquad (2.112)$$

を得る．$\Delta_g u_j=\lambda\,u_j$ なので，(2.112) の第 1 項に代入して整理すれば，

$$(\Delta_g-\lambda)\,v_j+\left(\frac{2-n}{2}\,\nabla^g\sigma-\lambda\,\sigma-\alpha_j\right)u_j=0 \quad (j=1,\ldots,\ell). \qquad (2.113)$$

ここで Δ_g の固有値 λ の任意の固有関数 $v\in C^\infty(M)$ と (2.113) の両辺とで L^2 内積を取ると，

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{2-n}{2}\,\nabla^g\sigma-\lambda\,\sigma-\alpha_j\right)u_j,v\right)_g&=-((\Delta_g-\lambda)\,v_j,v)_g\\&=-(v_j,(\Delta_g-\lambda)\,v)_g\\&=0.\end{aligned} \qquad (2.114)$$

(2.114) 式において $v=u_i$ とすれば，$(u_j,u_i)_g=\delta_{ij}$ なので，求める (2.110) 式を得る．□

補題 2.25（固有値の分離） $\dim M\geq 2$ とする．λ を Δ_g の任意の正の固有値とし，その重複度 ℓ が少なくとも 2 以上とする ($\ell\geq 2$)．このとき $\sigma\in C^\infty(M)$ を適切に選び，(2.108) 式の α_j $(j=1,\ldots,\ell)$ のうち少なくとも 2 つは相異なるようにできる．

証明 証明は 6 段に分かれる．

（第 1 段）V_λ を Δ_g の固有値 λ の固有空間とする：

$$V_\lambda:=\{f\in C^\infty(M)\,|\,\Delta_g\,f=\lambda\,f\} \quad (\dim V_\lambda=\ell).$$

ここで $P: C^\infty(M)\to V_\lambda$ を Δ_g の固有関数展開によって定義される V_λ への直交射影とする．このとき，直交射影の定義より，

$$(f,v)_g=(Pf,v)_g \quad (f\in C^\infty(M),\,v\in V_\lambda). \qquad (2.115)$$

任意の $\sigma \in C^\infty(M)$ に対して，線形写像 $G_\sigma : V_\lambda \to V_\lambda$ を，

$$G_\sigma f := P \circ \left(\frac{2-n}{2} \nabla^g \sigma - \lambda \sigma \right) f, \quad f \in V_\lambda \tag{2.116}$$

と定義する．このとき，補題 2.24 より，V_λ の正規直交基底 $\{u_i\}_{i=1}^{\ell}$ に関して，

$$(G_\sigma u_j, u_i)_g = \left(\left(\frac{2-n}{2} \nabla^g \sigma - \lambda \sigma \right) u_j, u_i \right)_g = \alpha_j \, \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le \ell) \tag{2.117}$$

が成り立ち，このことは線形写像 $G_\sigma : V_\lambda \to V_\lambda$ が V_λ の基底 $\{u_i\}_{i=1}^{\ell}$ により，対角成分が α_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ の対角行列により行列表示できることを意味する．G_σ が恒等写像の定数倍とならない，つまり，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell$ とならないように $\sigma \in C^\infty(M)$ が選べることを示せば良い．

（第2段）補題 2.22 (1) により，$\sigma \in C^\infty(M)$ と $u_1, u_2 \in V_\lambda$ に対して，

$$\begin{aligned}(G_\sigma u_1, u_2)_g &= \left(\left(\frac{2-n}{2} \nabla^g \sigma - \lambda \sigma \right) u_1, u_2 \right)_g \\ &= \left(\sigma, \frac{2-n}{2} \, \delta(u_2 \, du_1) - \lambda \, u_1 \, u_2 \right)_g \end{aligned} \tag{2.118}$$

となる．ここで場合分けをする．

（第3段）場合 (1): $\frac{2-n}{2} \, \delta(u_2 \, du_1) - \lambda \, u_1 \, u_2 \not\equiv 0$．この場合は，$\sigma := \frac{2-n}{2} \, \delta(u_2 \, du_1) - \lambda \, u_1 \, u_2$ を取る．そうすれば，(2.118) より，$(G_\sigma u_1, u_2)_g \neq 0$ および $(u_1, u_2)_g = 0$ であるので，G_σ が恒等写像の定数倍となることはない．

（第4段）場合 (2): $\frac{2-n}{2} \, \delta(u_2 \, du_1) - \lambda \, u_1 \, u_2 \equiv 0$．このときは，

$$u_1 \, u_2 \equiv 0 \tag{2.119}$$

となる．これは矛盾であり，場合 (2) は起きないことが第6段で示される．補題 2.22 (3) より $\delta(u_1 \, du_2) = \delta(u_2 \, du_1)$，及び仮定より (2.119) は次のように示される．

$$\left(\frac{2-n}{2} \Delta_g - 2 \lambda \right) (u_1 \, u_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2-n}{2}\,\delta d(u_1\,u_2) - 2\,\lambda\,u_1\,u_2\\
&= \frac{2-n}{2}\,\delta(u_1\,du_2 + u_2\,du_1) - 2\,\lambda\,u_1\,u_2\\
&= \left\{\frac{2-n}{2}\,\delta(u_1\,du_2) - \lambda\,u_1\,u_2\right\} + \left\{\frac{2-n}{2}\,\delta(u_2\,du_1) - \lambda\,u_1\,u_2\right\}\\
&\equiv 0 \qquad (2.120)
\end{aligned}
$$

したがって，$2-n<0$ つまり，$3 \geq n$ のとき $u_1\,u_2 \not\equiv 0$ とすると，(2.120) 式はラプラス作用素 Δ_g が負の固有値をもつことを意味することになるので，(2.119) 式を得る．$n=2$ のときは $\lambda>0$ としていたので，(2.120) 式は (2.119) 式そのものを意味している．

（第 5 段）そこで V_λ の正規直交基底として，

$$
f_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+u_2),\ f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1-u_2),\ f_3 = u_3, \ldots, f_\ell := u_\ell
$$

を取り，$\sigma := \frac{2-n}{2}\,\delta(f_2\,df_1) - \lambda\,f_1\,f_2$ に取る．このとき，(2.118) と同様に，

$$
\begin{aligned}
(G_\sigma f_1, f_2)_g &= \left(\sigma, \frac{2-n}{2}\,\delta(f_2\,df_1) - \lambda\,f_1\,f_2\right)_g\\
&= \int_M \sigma^2\,v_g. \qquad (2.121)
\end{aligned}
$$

（第 6 段）最後に $\sigma \not\equiv 0$ を示そう．そうすれば，G_σ は V_λ の正規直交基底 $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\ell\}$ によって対角行列に表示されず，したがって G_σ は恒等写像の定数倍となっていないことが示される．さて，$\sigma \equiv 0$ と仮定する．このとき，補題 2.22 (3) と $\delta(u_1\,du_2) = \delta(u_2\,du_1)$ より，

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{2-n}{2}\,\delta((u_1-u_2)\,d(u_1+u_2)) - \lambda\,(u_1+u_2)\,(u_1-u_2)\\
&= \frac{2-n}{2}\,(\delta(u_1\,du_1) - \delta(u_2\,du_2)) - \lambda(({u_1}^2 - {u_2}^2)\\
&= \left(\frac{2-n}{4}\,\delta\,d - \lambda\right)({u_1}^2 - {u_2}^2). \qquad (2.122)
\end{aligned}
$$

$2-n \le 0$ かつ $\lambda > 0$ としているので，${u_1}^2 - {u_2}^2 \not\equiv 0$ とすると，Δ_g が負の固有値をもつことになるので，${u_1}^2 - {u_2}^2 \equiv 0$ となる．このことは (2.119) 式より，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M ({u_1}^2 - {u_2}^2)^2\, v_g \\ &= \int_M ({u_1}^4 - 2\,{u_1}^2\,{u_2}^2 + {u_2}^4)\, v_g \\ &= \int_M ({u_1}^4 + {u_2}^4)\, v_g \end{aligned} \tag{2.123}$$

これから $u_i \equiv 0$ $(i=1,2)$ となり矛盾を生じる．ゆえに $\sigma \not\equiv 0$となり，補題 2.25 を得た.□

証明 定理 2.20 (2) の証明をしよう．$\dim M \ge 2$ とし，$\mathcal{S}_{k+1}$ が $\mathcal{S}_k$ の中で稠密であることを示そう $(k=1,2,\ldots)$.

（第1段）任意の $g \in \mathcal{S}_k$ に対して，g の任意の近傍内に $g' \in \mathcal{S}_{k+1}$ が取れることを示そう．$g \in \mathcal{S}_k$ であるので，最初の $k-1$ 個の固有値の重複度が 1 である．すなわち，

$$0 = \lambda_1(g) < \lambda_2(g) < \cdots < \lambda_{k-1}(g) < \lambda_k(g) \le \cdots$$

である．そこで $\lambda := \lambda_k(g)$ の重複度が ℓ とする．すなわち，

$$\lambda_k(g) = \cdots = \lambda_{k+\ell-1}(g) = \lambda < \lambda_{k+\ell}(g) \le \cdots$$

とする．そこで，$g(\tau) := (1+\tau\,\sigma)\,g \in \mathcal{M}$ $(\sigma \in C^\infty(M);\ -\varepsilon < \tau < \varepsilon)$ という (2.107) 式の g の変形を考える．

（第2段）定理 2.10 より，$g' \in U_\delta(g)$ ならば，

$$e^{-(n+1)\delta}\,\lambda_m(g) \le \lambda_m(g') \le e^{(n+1)\delta}\,\lambda_m(g) \quad (m=1,2,\ldots) \tag{2.124}$$

であるので，$g' \in U_{\frac{1}{2}}(g)$ かつ $e^{\frac{1}{2}(n+1)}\,(2\lambda) \le \lambda_m(g)$ とすると，

$$2\,\lambda = (2\,\lambda)\,e^{\frac{1}{2}(n+1)}\,e^{-\frac{1}{2}(n+1)} \le e^{-\frac{1}{2}(n+1)}\,\lambda_m(g) \le \lambda_m(g'). \tag{2.125}$$

したがって，ε より小さな正数 $\varepsilon' > 0$ を選び，$e^{\frac{1}{2}(n+1)}(2\lambda) \leq \lambda_m(g)$ ならば，

$$2\lambda \leq \lambda_m(g(\tau)) \quad (-\varepsilon' < \forall\, \tau < \varepsilon') \tag{2.126}$$

が成り立つようにできる．つまり，(2.126) 式より，$e^{\frac{1}{2}(n+1)}(2\lambda)$ 以上の Δ_g の固有値は今問題の固有値の重複度に影響を与えることはない．

（第 3 段）そこで $e^{\frac{1}{2}(n+1)}(2\lambda)$ より小さな Δ_g の固有値が N 個あるとして，N 番目までの固有値について定理 2.10 を適用し，ε' よりも小さな正数 $\varepsilon'' > 0$ を選び，任意の $i = 1, \ldots, \ell$ と $-\varepsilon'' < \tau < \varepsilon''$ に対して，

$$0 = \lambda_1(g(\tau)) < \lambda_2(g(\tau)) < \cdots < \lambda_{k-1}(g(\tau)) < \Lambda_i(\tau) < \lambda_{k+\ell}(g(\tau)) \leq \cdots \tag{2.127}$$

とできる．ここで Λ_i $(i = 1, \ldots, \ell)$ は ℓ 個の $\Delta_{g(\tau)}$ の固有値である．

（第 4 段）このように各 $\sigma \in C^\infty(M)$ に対して，正数 $\varepsilon'' > 0$ を選んだ上で，補題 2.25 を適用しよう．$\sigma \in C^\infty(M)$ を適切に選び，

$$\Lambda_j(\tau) = \lambda + \tau\,\alpha_j + \tau^2\,\beta_j(\tau) \quad (j = 1, \ldots, \ell) \tag{2.128}$$

としたとき，$\alpha_i \neq \alpha_j$ $(1 \leq i \neq j \leq \ell)$ となるようにできる．したがって，この関数 $\sigma \in C^\infty(M)$ に対して，ε'' よりも小さな正数 $\varepsilon''' > 0$ を選び，

$$\Lambda_i(\tau) \neq \Lambda_j(\tau) \quad (-\varepsilon''' < \forall\, \tau < \varepsilon''') \tag{2.129}$$

が成り立つようにできる．こうして，$-\varepsilon''' < \tau < \varepsilon'''$ である任意の τ に対して，$\Delta_{g(\tau)}$ の最初から k 個までの固有値の重複度は 1, $k+1$ 個目の固有値の重複度は高々 $\ell - 1$ となるような 関数$\sigma \in C^\infty(M)$ を取ることができた．

（第 5 段）以上の操作を有限回行って，$g \in \mathcal{S}_k$ の任意の近くに $\mathcal{S}_{k+1}$ の元が存在することがいえる．□

第 3 章 ◇ 最小正固有値のチーガーとヤウの評価

本章では任意の C^∞ コンパクト・リーマン多様体 (M,g) のラプラス作用素 Δ_g を固有値をその重複度を込めて一列に並べ，

$$0 = \lambda_1(g) < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \leq \cdots \tag{3.1}$$

としたとき，第 k 固有値 $\lambda_k(g)$ の性質を調べる（文献によっては

$$0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) \leq \lambda_2(g) \leq \cdots \leq \lambda_{k-1}(g) \leq \cdots$$

と，固有値の番号を一つずらして勘定する仕方もあるので注意を要する）.

本章ではまず，最小正固有値 $\lambda_2(g)$（文献によっては第 1 固有値ともいう）について注目して調べる．というのは，ラプラス作用素の固有値問題は膜の振動問題，すなわち“太鼓の音がどのように聞こえるか”ということと密接な関係があるからで，音響学の説くところによれば，楽音を構成する部分音のうち，振動数の最小のものを基音と呼び，振動数の高い音（上音）とは区別されている．この理由は，普通，楽器から出る上音は，振動数が基音の振動数の整数倍のもの（倍音と呼ばれている）のみであり，基音の振動数と倍音の含有率とによってその楽器から出る音が，ほとんど決定されるからとのことである．このことからも，基音（われわれの言葉で言えば，最小正固有値（第 2 固有値）$\lambda_2(g)$）の重要性が推察できるであろう.

本章と次章では $\lambda_2(g)$ がいかなる影響をリーマン多様体 (M,g) の幾何から受けるか，すなわち，$\lambda_2(g)$ の動きうる範囲が (M,g) の曲率，直径，体積などで上と下から制限を受けか，また第 k 固有値 $\lambda_k(g)$ はどのように評価されるか，などの結果を紹介する．本章ではチーガーによる $\lambda_2(g)$ の評価と，ヤウによる同様の評価を紹介する.

3.1　本章における主たる結果

本章ではこれまでと同様に，考えるリーマン多様体 (M,g) はすべてコンパクト，連結，（向き付け可能） C^∞ 多様体 M で境界をもたない $\partial M=\emptyset$ とし，g は C^∞ リーマン計量とする．またリーマン計量 g をわざわざ明記しないこともある．

3.1.1　正の最小固有値 λ_2 に対するチーガーの評価

定義 3.1　与えられた n 次元リーマン多様体 (M,g) に対して，次の等周的定数（**チーガー定数**と呼ばれる）$h(M)$ を考える：

$$h(M) := \inf_H \frac{A(H)}{\min\{V(M_1),\, V(M_2)\}}, \tag{3.2}$$

ここで (3.2) 式の右辺の下限は M の余次元 1 の部分多様体 H であり，M_1 と M_2 はともに H を境界にもつ M の部分多様体で，$M=M_1 \sqcup M_2 \sqcup H$（共通部分をもたない和集合）を満たすもののすべてを亙って取る．さらに $A(H)$ は H 上に M 上のリーマン計量 g より誘導されたリーマン計量に関する H の $(n-1)$ 次元測度を表し，$V(M_i)$ $(i=1,2)$ は (M,g) に関する M_i の n 次元測度を表す．

このとき次の定理が成り立つ：

定理 3.2　**（チーガーの定理）**　リーマン多様体 (M,g) のチーガー定数 $h(M)$ は正の有限値であり，ラプラス作用素 Δ_g の最小正固有値 $\lambda_2(g)$ はチーガー定数 $h(M)$ により次のように下から評価される．

$$\lambda_2(g) \geq \frac{h(M)^2}{4} > 0. \tag{3.3}$$

このチーガーの定理はどんなコンパクト・リーマン多様体でも成り立つ定理であるが，チーガー定数 $h(M)$ は計算が難しいことで知られている．定理 3.2 の証明は与えない ([12])．次に述べるヤウの評価はチーガーの定理を使いやす

く改良したものである．意外にこれまで使う人が出てこなかったのは残念なことである．

3.1.2 正の最小固有値 λ_2 に対するヤウの評価

定義 3.3 与えられた n 次元リーマン多様体 (M, g) に対して，次の**等周的定数** (**ヤウ定数**と呼ぼう) $I(M)$ を考える：

$$I(M) := \inf \frac{A(\partial M_1 \cap \partial M_2)}{\min\{V(M_1), V(M_2)\}}, \tag{3.4}$$

ここで (3.4) 式の右辺の下限は $M = M_1 \cup M_2$, $V(M_1 \cap M_2) = 0$ を満たし，M の C^1 級の境界 ∂M_1 および ∂M_2 をそれぞれもつ n 次元部分多様体 M_1 と M_2 のすべてを亙って取る．また，$A(\cdot)$ と $V(\cdot)$ は，それぞれ，$(n-1)$ 次元と n 次元のハウスドルフ測度である．

$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，k 次元**ハウスドルフ測度** $H^k(\cdot)$ とは，M の部分集合 N に対して，

$$H^k(N) := \lim_{r \downarrow 0} H^k(N, r) \tag{3.5}$$

であり，

$$H^k(N, r) := \inf_{\mathcal{F}} \sum_{S \in \mathcal{F}} 2^{-k} \, \alpha(k) \, \mathrm{diam}(S)^k \tag{3.6}$$

であるとする．ただし $\alpha(k)$ は $\mathbb{R}^k$ 内の半径 1 のボールの体積であり，(3.6) 式の右辺の下限は N の可算被覆 $\mathcal{F}$ で，$\mathcal{F}$ の各元 S の直径 $\mathrm{diam}(S)$ が r より小であるもののすべてに亙る．

N が M の k 次元 C^1 部分多様体のとき，$H^k(N)$ は M 上のリーマン計量 g から誘導される N 上のリーマン計量に関する N の体積に等しく，$\dim N > k$ のときは，$H^k(N) = \infty$ である．

ここで2つのチーガー定数 $h(M)$ と ヤウ定数 $I(M)$ の違いを述べておく：勿論，M を2つの部分多様体 M_1, M_2 に分割するような滑らかな超曲面 H が存在するようなチーガー定数 $h(M)$ を定義する状況であれば，ヤウ定数 $I(M)$ の右辺の状況を与えるので，$h(M) \geq I(M)$ が成り立つ．しかし，$I(M)$ の定

義の右辺の $M = M_1 \cup M_2$, $V(M_1 \cap M_2) = 0$ を与えるような M_1, M_2 の場合には，$\partial M_1 \cap \partial M_2$ が部分多様体にすらならないような複雑な場合も起こり得る．このため，ハウスドルフ測度 $H^k(\cdot)$ の概念が必要となったのである．恐らく $h(M) = I(M)$ であろう．

本書では扱わないが，ヤウの原論文 [56] では，境界付き多様体の場合も扱われている．

次の定理が成り立つ．

定理 3.4

$$I(M) = \inf_{f \in C^1(M), \text{non-const}} \frac{\int_M |\nabla f| \, v_g}{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f - \beta| \, v_g}. \tag{3.7}$$

(3.7) 式右辺の最初の下限は定数でない $f \in C^1(M)$ についてのものである．

この定理とその証明は，定理 3.5 の証明で重要な役割を演じる．

定理 3.5 任意の $f \in C^1(M)$ に対して次の 2 つが成り立つ：

(1) 実数 $k \in \mathbb{R}$ が

$$V(\{x \in M | \, f(x) \geq k\}) \leq \frac{1}{2} V(M) \tag{3.8}$$

かつ

$$V(\{x \in M | \, f(x) \leq k\}) \leq \frac{1}{2} V(M) \tag{3.9}$$

を満たすならば，次が成り立つ：

$$\int_M |\nabla f|^2 \, v_g \geq \frac{I(M)^2}{4} \int_M (f - k)^2 \, v_g. \tag{3.10}$$

(2) $\int_M f \, v_g = 0$ ならば，次が成り立つ：

$$\int_M |\nabla f|^2 \, v_g \geq \frac{I(M)^2}{4} \int_M f^2 \, v_g. \tag{3.11}$$

これらの定理の系として次が成り立つ：

系 3.6 (M,g) のラプラス作用素 Δ_g の最小正固有値 $\lambda_2(g)$ は次のように評価される：

$$\lambda_2(g) \geq \frac{I(M)^2}{4}. \tag{3.12}$$

本書ではラプラス作用素の最小正固有値に，$\lambda_2(g)$ と固有値の番号を付けていることに注意する．

このヤウ定数 $I(M)$ はリーマン多様体 (M,g) のリッチ曲率の下限で次のように下から評価される．

定理 3.7 n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M,g) のリッチ曲率が次を満たすとする：

$$\text{リッチ曲率} \geq (n-1)K \tag{3.13}$$

ただし K は実数とする．ここで便宜上次の量 $\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}}$ を考える．ここで

$K>0$ のとき，$\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}} := \frac{\sin(\sqrt{K}\,r)}{\sqrt{K}}$,

$K=0$ のとき，$\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}} := 1$,

$K<0$ のとき，$\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}}$

である．このとき $I(M)$ は次のように下から評価される：

$$I(M)^{-1} \leq 2\,\alpha(n)\,d(M)\,V(M)^{-1}\int_0^{d(M)}\left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}}\right)^{n-1} dr. \tag{3.14}$$

ここで $\alpha(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の半径 1 の球面の表面積，$V(M)$ は (M,g) の体積，$d(M)=\mathrm{diam}(M)$ は (M,g) の直径 をそれぞれ表す．

定理 3.7, (3.14) の改良版がある ([23])．以降で，ヤウの結果の証明を与える．

3.2 co-area 公式

証明の鍵の一つは co-area 公式と呼ばれる次の定理である ([27], [47]).

定理 3.8 **(co-area 公式)** 任意の n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M,g) 上の任意の C^1 関数 f に対して，f の勾配ベクトル場 ∇f について，

$$\int_M |\nabla f| \, v_g = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\{x \in M | \, f(x) = t\}\right) dt \tag{3.15}$$

が成り立つ．ここで $A\left(\{x \in M | \, f(x) = t\}\right)$ は，関数 f の t におけるレベル集合 $\{x \in M | \, f(x) = t\}$ の $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度を表す．

注意 3.9 リーマン多様体 (M,g) 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が**リップシッツ関数**であるとは，

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x,y) \qquad (\forall x, y \in M)$$

を満たす定数 $L > 0$ が存在するときをいう．定理 3.8 は M 上のリップシッツ関数 f に対しても成立することが知られている ([28])．なお，リップシッツ関数 f に対しては，M 上ほとんど至る所で微分可能であり，(3.15) の積分が有限値であることが知られている（H. Rademacher の定理（例えば [26], p.79 を見よ））．

証明 定理 3.8 の証明を与えよう．証明は 5 段に分かれる．

（第 1 段）$M' := \{x \in M | \, |\nabla f|(x) > 0\}$ とおくと，集合 M' は M 内の開集合であり，サード (Sard) の定理（例えば [37]，p.51 を見よ）より，集合

$$\{t \in \mathbb{R} | \, (\text{ある } x \in M \text{ について}) t = f(x) \text{ かつ } |\nabla f|(x) = 0\}$$

は $\mathbb{R}$ において測度 0 であるので，

$$\int_{M'} |\nabla f| \, v_g = \int_{-\infty}^{\infty} A(\{x \in M' | \, f(x) = t\}) \, dt \tag{3.16}$$

を示せば十分である．$M' = \emptyset$ のときは (3.16) 式は明らか．$M' \neq \emptyset$ とし，任意に M' の点 x_0 を取り，$f(x_0) = t_0$ とする．このとき，x_0 のまわりの座標近傍系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を選ぶと，t_0 に十分近い t に対して，$U \cap \{x \in M' | \, f(x) = t\}$

は M' の $(n-1)$ 次元部分多様体となり，U の局所座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ として次が成り立つようにできる：x^1 は $\{x \in U |\, f(x) = t\} = \{x \in U | x^1(x) = t - t_0\}$ を満たし，かつ $\{x^2, \ldots, x^n\}$ は $\{x \in U |\, f(x) = t_0\}$ の座標系を与える．

（第2段）このとき，f の勾配ベクトル場 ∇f は

$$\begin{cases} g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \nabla f\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x^1} = 1 \\ g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \nabla f\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n) \end{cases}$$

を満たすので，

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \, \frac{\partial f}{\partial x^i} \, \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{n} g^{1j} \, \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

これから，

$$|\nabla f|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} g^{1j} \, g^{1k} \, g_{jk} = g^{11} \tag{3.17}$$

を得る．ここでさらに次のような工夫をする．

（第3段）$X := \nabla f = \nabla x^1$ の生成する1係数変換群 $\{\varphi_r\}$ $(r \in \mathbb{R})$ とすると，これは $\varphi_r \circ \varphi_s = \varphi_{r+s}$ かつ

$$X_p \psi = \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \psi(\varphi_r(p)) \quad (\psi \in C^1(M),\ p \in M)$$

を満たす．さらに，x_0 の近傍 U 内の任意の点 x は1係数変換群 $\{\varphi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ と U 内の点 $(0, x^2, \ldots, x^n)$ を用いて，$x = \varphi_r(0, x^2, \ldots, x^n)$ $(r, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R})$ と表示できるので，座標系として $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ の代わりに $(r, x^2, \ldots, x^n)$ を採用する．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial r} = \nabla f \tag{3.18}$$

となる．なぜなら，U 上の任意の C^1 関数 ψ と $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in U$ に対して，

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_x \psi = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi(\varphi_{r+s}(0, x^2, \ldots, x^n)) = (\nabla f)_x \psi$$

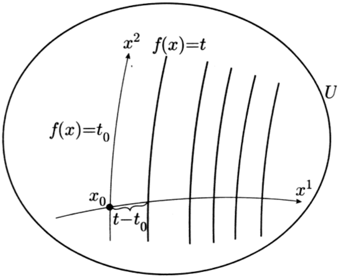


図 3.1 関数 f のグラフと等高線

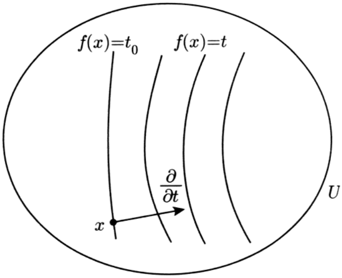


図 3.2 U における関数 f の等高線

となるからである.

(第 4 段) したがって, 特に, (3.18) 式と $f(0,x^2,\ldots,x^n)=t_0$ とを合わせて, $r=0$ なる U 上の点では,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g\left(\nabla f,\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial f}{\partial x^j}=0 \quad (j=2,\ldots,n). \tag{3.19}$$

このように U 上の取り直した座標系 $(r,x^2,\ldots,x^n)$ について, $\widetilde{g}_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ を g の成分とし, g の $(x^2,\ldots,x^n)$ に関する成分を $\widetilde{g}'_{ij}$ $(i,j=2,\ldots,n)$ とすると,

$$\widetilde{g}_{11}=g(\nabla f,\nabla f)=|\nabla f|^2 \tag{3.20}$$

であり,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x^1}&=\left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)^{-1}=((\nabla f)x^1)^{-1}\\&=(g(\nabla f,\nabla x^1))^{-1}=(g(\nabla f,\nabla f))^{-1}=\frac{1}{|\nabla f|^2}\end{aligned} \tag{3.21}$$

となる. さらに, $dr=\sum_{j=1}^n\frac{\partial r}{\partial x^j}\,dx^j$ であるので, 体積要素 v_g は次のように計算される:

$$\begin{aligned}v_g&=\sqrt{\det(\widetilde{g}_{ij})}\,dr\,dx^2\cdots dx^n\\&=\sqrt{\widetilde{g}_{11}\ \det(\widetilde{g}'_{ij})_{ij=2,\ldots,n}}\,dr\,dx^2\cdots dx^n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\widetilde{g}_{11}}\, dr\ d\sigma \\
&= |\nabla f|\, \frac{1}{|\nabla f|^2}\, dx^1\, d\sigma \\
&= \frac{1}{|\nabla f|}\, dx^1\, d\sigma = \frac{1}{|\nabla f|}\, dt\, d\sigma
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

を得た．ここで $\{x \in M |\, f(x) = t\}$ 上 (M, g) より誘導されるリーマン計量に関する体積要素を $d\sigma$ とおき，$x^1 = t - t_0$ を使った．したがって (3.22) より

$$
|\nabla f|\, v_g = dt\, d\sigma \tag{3.23}
$$

を得る．ここで $f = f(x)$ の U 上での最小値と最大値をそれぞれ，α, β とすれば，(3.23) より，

$$
\begin{aligned}
\int_U |\nabla f|\, v_g &= \int_\alpha^\beta dt \int_{\{x \in U |\, f(x) = t\}} d\sigma \\
&= \int_\alpha^\beta A(\{x \in U |\, f(x) = t\})\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A(\{x \in U |\, f(x) = t\})\, dt
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

である．

（第5段）M の有限個の開近傍の集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ で，$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta)$ かつ $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{U_\alpha}$ を満たすものを取る．このとき，各 U_α $(\alpha \in \Lambda)$ に対して，$t_0 \in f(U_\alpha)$ を取り，第1段から第4段までの議論を行うと，

$$
\int_{U_\alpha} |\nabla f|\, v_g = \int_{-\infty}^{\infty} A(\{x \in U_\alpha |\, f(x) = t\})\, dt \tag{3.25}
$$

が成り立つ．したがって，各 $\alpha \in \Lambda$ に対して，(3.25) を使い，

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla f|\, v_g &= \int_{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{U_\alpha}} |\nabla f|\, v_g \\
&= \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\overline{U_\alpha}} |\nabla f|\, v_g
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} A(\{x \in U_\alpha |\, f(x) = t\})\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Lambda} A(\{x \in U_\alpha |\, f(x) = t\})\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{x \in U_\alpha |\, f(x) = t\} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(\{x \in M |\, f(x) = t\})\, dt. \tag{3.26}$$

こうして定理 3.8 を得た. □

例　3 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, g_0)$ 内の半径 $a > 0$ の 2 次元球面を

$$M_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \tag{3.27}$$

とし，M_a 上の極座標を

$$x = a\, \cos u\, \cos v,\ y = a\, \cos u\, \sin v,\ z = a\, \sin u$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2};\ 0 < v < 2\pi \right) \tag{3.28}$$

とする．いま，M_a 上の C^1 関数 f として，高さの関数

$$f(p) := z(p) = a\, \sin u \quad (p = (x(p), y(p), z(p)) \in M_a) \tag{3.29}$$

を取る．$\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド内積より誘導される M_a 上のリーマン計量 g は

$$g = a^2\, du^2 + a^2\, \cos^2 u\, dv^2, \tag{3.30}$$

となり，g の M_a 上の座標 (u, v) に関する g の成分などは

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 u \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2}\, \cos^{-2} u \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

と与えられる．このとき，

$$|\nabla f| = \sqrt{g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\,g^{12}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} = \cos u \tag{3.32}$$

となり，体積要素 v_g は

$$v_g = \sqrt{g_{11}\,g_{22} - {g_{12}}^2}\,du\,dv = a^2\,\cos u\,du\,dv \tag{3.33}$$

となるので，(3.32) と (3.33) より，

$$\begin{aligned}\int_{M_a} |\nabla f|\,v_g &= \int_{\{-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\,0<v<2\pi\}} a^2\,\cos^2 u\,du\,dv \\ &= 4\,\pi\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \pi^2\,a^2\end{aligned} \tag{3.34}$$

である．一方，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} A(\{p\in M_a|\,f(p)=t\}) &= \int_{-a}^{a} 2\pi\,\sqrt{a^2-t^2}\,dt \\ &= 4\,\pi\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \pi^2\,a^2.\end{aligned} \tag{3.35}$$

ここで，(3.35) 式において $t = a\sin u$ と変数変換した．確かにいまの場合，co-area 公式は成立している． □

3.3 定理 3.4, 3.5 と系 3.6 の証明

証明 定理 3.4 の証明をする．

最初に

<u>I. “(3.7) の左辺 $\leq$ (3.7) の右辺”</u>，すなわち，

$$I(M) \leq \inf_{f\in C^1(M),\text{non-const}} \frac{\int_M |\nabla f|\,v_g}{\inf_{\beta\in\mathbb{R}} \int_M |f-\beta|\,v_g}$$

を示す．$f \in C^1(M)$ を定数でない関数とする．

（第１段）各 $k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f^+(x) := \max\{f(x)-k,\, 0\}\,, f^-(x) := -\min\{f(x)-k,\, 0\} \quad (x \in M)$$

によって，M 上の正値リップシッツ関数 f^+, f^- を定義する（注意3.9を見よ）．$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ $(x \in M)$ である．そこで $k \in \mathbb{R}$ を，

$$V(\{x \in M|\, f^+(x) > 0\}) \le \frac{1}{2} V(M), \text{ かつ}$$
$$V(\{x \in M|\, f^-(x) > 0\}) \le \frac{1}{2} V(M) \tag{3.36}$$

となるように $k \in \mathbb{R}$ を選んでおく．このとき，

$$\int_M |\nabla f^+|\, v_g \ge I(M) \int_M |f^+|\, v_g \text{ かつ}$$
$$\int_M |\nabla f^-|\, v_g \ge I(M) \int_M |f^-|\, v_g \tag{3.37}$$

が成り立つ．実際，f^+ については，co-area 公式（特に注意 3.9）より，

$$\int_M |\nabla f^+|\, v_g = \int_0^\infty A(\{x \in M|\, f^+(x) = t\})\, dt. \tag{3.38}$$

開集合 $\{x \in M|\, f^+(x) > 0\}$ 上では f^+ は C^1 なので，サードの定理により，集合 $\{x \in M|\, f(x) = t\}$ は，空集合であるかまたは $\{x \in M|\, f(x) = t, |\nabla f|(x) > 0\}$ と一致する（このような t を f^+ の正常値という）．このような f^+ の正常値 t に対して，

$$M_+(t) := \{x \in M|\, f^+(x) > t\} \quad (\text{開集合})$$

とおくと，

$$V(M_+(t)) \le V(\{x \in M|\, f^+(x) > 0\}) \le \frac{1}{2} V(M)$$

より，

$$V(M_+(t)) \le V(M \backslash M_+(t)). \tag{3.39}$$

$\partial M_+(t) = \{x \in M \mid f^+(x) = t\} = \partial(M \backslash V_+(t))$ は n 次元多様体 M の $(n-1)$ 次元部分多様体となっている．よって $I(M)$ の定義と (3.39) より，(3.38) 式の右辺は

$$\int_0^\infty A(\{x \in M \mid f^+(x) = t\})\,dt \geq I(M) \int_0^\infty V(M_+(t))\,dt. \tag{3.40}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^\infty V(M_+(t))\,dt &= \int_0^\infty dt \int_{\{x \in M \mid f^+(x) > t\}} v_g \\ &= \int_M \left(\int_0^{f^+(x)} dt \right) v_g(x) \quad (\text{積分の順序変更}) \\ &= \int_M f^+(x)\, v_g(x). \end{aligned} \tag{3.41}$$

これから求める (3.37) の前半の式を得る．f^- についても同様.

（第2段）したがって，

$$\int_M |\nabla f|\, v_g \geq I(M) \int_M |f - k|\, v_g \tag{3.42}$$

を得る．なぜならば，$|f-k| = f^+ + f^-$ と (3.37) より，

$$I(M) \int_M |f-k|\, v_g = I(M) \int_M (f^+ + f^-)\, v_g \leq \int_M (|\nabla f^+| + |\nabla f^-|)\, v_g.$$

一方，$f = f^+ - f^-$ と $\mathrm{supp}(f^+) \cap \mathrm{supp}(f^-) = \emptyset$ より，

$$\int_M |\nabla f|\, v_g = \int_M |\nabla f^+ - \nabla f^-|\, v_g = \int_M (|\nabla f^+| + |\nabla f^-|)\, v_g$$

となるからである．

結局，(3.42) より，求める次の評価式を得る．

$$\frac{\int_M |\nabla f|\, v_g}{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f - \beta|\, v_g} \geq \frac{\int_M |\nabla f|\, v_g}{\int_M |f-k|\, v_g} \geq I(M). \tag{3.43}$$

今度は，逆向きの不等式を示す：

II. "(3.7) の左辺 $\geq$ (3.7) の右辺"，すなわち，

$$I(M) \geq \inf_{f \in C^1(M),\,\text{non-const}} \frac{\int_M |\nabla f|\, v_g}{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f - \beta|\, v_g}$$

を示す．

（第1段）M_1 と M_2 を $M = M_1 \cup M_2$, $V(M_1 \cap M_2) = 0$ を満たす M の C^1 境界 ∂M_1 及び ∂M_2 をもつ M の C^1 部分多様体とする．必要なら番号を取り替えて $V(M_1) \leq V(M_2)$ としても一般性を失わない．十分小さい正数 $\varepsilon > 0$ を取り，M 上次のような関数 f_ε を考える：

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{\varepsilon} & (x \in \Delta(\varepsilon)) \\ 0 & (r(x) > \varepsilon,\ x \in M_2) \\ 1 & (x \in M_1) \end{cases}$$

ここで $r(x)$ $(x \in M)$ は $\partial M_1 \cap \partial M_2$ からの距離 $r(x) := r(x, \partial M_1 \cap \partial M_2)$ を表し，$\Delta(\varepsilon) := \{x \in M_2 |\, r(x) \leq \varepsilon\}$ とする．

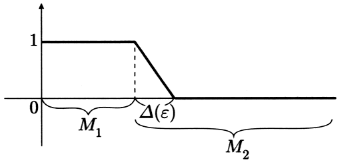


図 3.3　関数 f_ε のグラフ

このとき，各 $\varepsilon > 0$ に対して，次のような性質を満たす2つの正数 $k_\varepsilon > 0$ と $\ell_\varepsilon > 0$ が存在する：

$$\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f_\varepsilon - \beta|\, v_g \geq \int_M |f_\varepsilon - k_\varepsilon|\, v_g - \ell_\varepsilon \tag{3.44}$$

$$\text{かつ } k_\varepsilon \to 0,\ \ell_\varepsilon \to 0\ (\varepsilon \to 0 \text{ のとき})$$

(3.44) の証明は第4段で行う．

（第2段）(3.44) 式が言えたとして，求める不等式が成り立つことを示す．まず次の不等式を示そう．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_M |\nabla f_\varepsilon|\, v_g}{\inf\limits_{\beta\in\mathbb{R}}\int_M |f_\varepsilon-\beta|\, v_g}\le \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_M |\nabla f_\varepsilon|\, v_g}{\int_M |f_\varepsilon-k_\varepsilon|\, v_g-\ell_\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_M |\nabla f_\varepsilon|\, v_g}{\int_M |f_\varepsilon-k_\varepsilon|\, v_g}=\frac{A(\partial M_1\cap\partial M_2)}{V(M_1)}. \tag{3.45}$$

最初の不等号と第1の等号は (3.44) から直ちに言える．第2の等号は次のように示される．

（第3段）(3.45) の第2の等号を示す．f_ε の定義より，

$$\text{分母} := \int_M |f_\varepsilon-k_\varepsilon|\, v_g$$

$$=|1-k_\varepsilon|\, V(M_1)+\int_{\Delta(\varepsilon)}\left(1-\frac{r}{\varepsilon}\right) v_g+k_\varepsilon\, V(M_2\backslash\Delta(\varepsilon)). \tag{3.46}$$

ここで (3.46) の第2項は $\varepsilon>0$ が十分小さいときはその定義より，$\Delta(\varepsilon)\approx(\partial M_1\cap\partial M_2)\times[0,\varepsilon]$ なので，

$$\text{第2項} := \int_{\Delta(\varepsilon)}\left(1-\frac{r}{\varepsilon}\right) v_g = A(\partial M_1\cap\partial M_2)\int_0^\varepsilon\left(1-\frac{r}{\varepsilon}\right) dr+o(\varepsilon)$$

$$=A(\partial M_1\cap\partial M_2)\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\right)+o(\varepsilon)$$

$$=0\quad(\varepsilon\to 0\ \text{のとき}). \tag{3.47}$$

ゆえに，(3.45) の分母は $\varepsilon\to 0$ のとき，$V(M_1)$ に近づく．

(3.45) の分子の積分について調べる：co-area 公式により，

$$\text{分子} := \int_M |\nabla f_\varepsilon|\, v_g = \int_0^1 A(\{x\in M|\, f_\varepsilon(x)=t\})\, dt$$

$$=\int_0^1 A(\{x\in\Delta(\varepsilon)|\, f_\varepsilon(x)=t\})\, dt$$

$$=A(\partial M_1\cap\partial M_2)+O(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0\ \text{のとき}) \tag{3.48}$$

となる．こうして第2の等号が示された．さらに，(3.45) の右辺については $\frac{A(\partial M_1 \cap \partial M_2)}{\min\{V(M_1), V(M_2)\}}$ となるので，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_M |\nabla f_\varepsilon| \, v_g}{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f_\varepsilon - \beta| \, v_g} \leq \frac{A(\partial M_1 \cap \partial M_2)}{\min\{V(M_1), V(M_2)\}} \tag{3.49}$$

を得た．$M = M_1 \cup M_2$ の分割は任意であるので，結局求める不等式を得る．

（第4段）最後に，(3.44) を満たす正数 k_ε と ℓ_ε が存在することを示す．(3.44) 式の左辺の下限における積分を $F_\varepsilon(\beta)$ とおく．そのとき，

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\beta) &:= \int_M |f_\varepsilon - \beta| \, v_g \\ &= |1 - \beta| \, V(M_1) + |\beta| \, V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon)) + \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon - \beta| \, v_g. \end{aligned} \tag{3.50}$$

そこで，β の値により，次の3通りに場合分けをして (3.50) を調べる．

(i) $\beta \leq 0$ の場合．このとき，$F_\varepsilon(\beta) \geq F_\varepsilon(0)$.

実際，$\beta = -\gamma$ $(\gamma \geq 0)$ とおくと，(3.50) より，

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\beta) &= (1 + \gamma) \, V(M_1) + \gamma \, V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon)) + \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon + \gamma| \, v_g \\ &\geq V(M_1) + \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon| \, v_g \\ &= F_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

(ii) $\beta \geq 1$ のとき，$F_\varepsilon(\beta) \geq F_\varepsilon(1)$.

実際，

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\beta) &= (\beta - 1) \, V(M_1) + \beta \, V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon)) + \int_{\Delta(\varepsilon)} (\beta - f_\varepsilon) \, v_g \\ &\geq V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon)) + \int_{\Delta(\varepsilon)} (1 - f_\varepsilon) \, v_g \\ &= F_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

(iii) $0 \le \beta \le 1$ のとき．この場合，次が成り立つ．

$$F_\varepsilon(\beta) \ge (1-\beta)\,V(M_1) + \beta\,V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon))$$
$$= V(M_1) + \beta\,(V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon)) - V(M_1)). \qquad (3.51)$$

そこで，まず，$V(M_1) < V(M_2)$ の場合．十分小さな $\varepsilon > 0$ を取ると，$V(M_1) < V(M_2 \backslash \Delta(\varepsilon))$ とできるので，(3.50) 式より，$F_\varepsilon(\beta) \ge V(M_1)$ となる．他方，$\beta = 0$ のとき，$\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(0) = V(M_1)$ である．この場合は直ちに，(3.44) を満たす正数 k_ε と ℓ_ε の存在が示せる．

残る $V(M_1) = V(M_2)$ の場合．(i) の場合は，$F_\varepsilon(\beta) \ge V(M_1) = F_\varepsilon(0) - \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon|\,v_g$ となる; (ii) の場合は，$F_\varepsilon(\beta) \ge F_\varepsilon(1)$ より (iii) に帰着する; (iii) の場合は，(3.51) より，$F_\varepsilon(\beta) \ge V(M_1) - \beta\,V(\Delta(\varepsilon)) \ge F_\varepsilon(0) - \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon|\,v_g - V(\Delta(\varepsilon))$ となる．したがって，(i) のときは，$k_\varepsilon = 0$, $\ell_\varepsilon = \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon|\,v_g$, (ii), (iii) のときは，$k_\varepsilon = 0$, $\ell_\varepsilon = \int_{\Delta(\varepsilon)} |f_\varepsilon|\,v_g + V(\Delta(\varepsilon))$ を取れば，(3.44) が成り立つ.□

証明 定理 3.5 の証明をする．

(1) の証明．実数 k は仮定を満たすものとし，前のように，

$$f^+(x) := \max\{f(x)-k, 0\}\,, f^-(x) := -\min\{f(x)-k, 0\}$$

とおく．このとき，$\int_M f^+(x)\,f^-(x)\,v_g(x) = 0$ なので，

$$\begin{aligned}\int_M (f-k)^2\,v_g &= \int_M (f^+ + f^-)^2\,g_v \\ &= \int_M (f^+)^2\,v_g + \int_M (f^-)^2\,v_g \\ &\le \frac{1}{I(M)}\left\{\int_M |\nabla\,((f^+)^2)\,|\,v_g + \int_M |\nabla\,((f^-)^2)\,|\,v_g\right\}. \end{aligned} \qquad (3.52)$$

(3.52) の最後の不等式は次のように示される．定理 3.8 (co-area 公式) により，

$$\int_M |\nabla\,((f^+)^2)\,|\,v_g = \int_0^\infty A(\{x \in M|\,(f^+)^2(x) = t\})\,dt. \qquad (3.53)$$

ここで $(f^+)^2$ は $\{x \in M|\, f^+(x) > t\}$ 上で C^1 関数であるので，定理3.4の証明の (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) と同様の議論により，

$$\int_M |\nabla\left((f^+)^2\right)|\, v_g \geq I(M) \int_M (f^+)^2\, v_g \tag{3.54}$$

を得，f^- についても同様であるからである．

さて，(3.52) 式は次のように評価される：$\nabla\left((f^{\pm})^2\right)$ を計算して，コーシー・シュワルツの不等式を使って，

$$\begin{aligned}(3.52)\text{ 式の右辺} &\leq \frac{2}{I(M)} \int_M (f^+ + f^-)\, |\nabla f|\, v_g \\ &\leq \frac{2}{I(M)} \left(\int_M (f-k)^2\, v_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla f|^2\, v_g\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\tag{3.55}$$

(3.52), (3.55) より，

$$\frac{I(M)^2}{4} \int_M (f-k)^2\, v_g \leq \int_M |\nabla f|^2\, v_g, \tag{3.56}$$

すなわち，(3.10) を得る．

(2) の証明．$\int_M f\, v_g = 0$ とする．(1) により，

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla f|^2\, v_g &\geq \frac{I(M)^2}{4} \int_M (f-k)^2\, v_g \\ &= \frac{I(M)^2}{4} \left(\int_M f^2\, v_g - 2k \int_M f\, v_g + k^2 \int_M v_g\right) \\ &\geq \frac{I(M)^2}{4} \int_M f^2\, v_g. \end{aligned}\tag{3.57}$$

□

証明　系 3.6 を証明する．定理 3.5 (2) と

$$\lambda_2(g) = \inf_{\{0 \not\equiv f \in C^1(M),\, \int_M f\, v_g = 0\}} \frac{\int_M |\nabla f|^2\, v_g}{\int_M f^2\, v_g} \tag{3.58}$$

であることから，直ちにわかる．(3.58) は命題 2.13 の注意 2.14 の $k=2$ の場合で，この場合 $L_1=\{a|\, a\in\mathbb{R}\}$ であり，$\|df\|_g{}^2=\int_M |\nabla f|^2\, v_g$ に注意すれば良い．□

3.4 定理 3.7 の証明

定理 3.7 の証明のためには，リーマン幾何学に基づくいくつかの補題が必要である．最初にそれらを準備する．

連結な n 次元 C^∞ コンパクト・リーマン多様体 (M,g) において，各点 $x\in M$ における接空間 T_xM 内の単位球面を

$$S_x := \{X\in T_xM|\, g_x(X,X)=1\} \tag{3.59}$$

とおく．$y\in M$ に対して，$r(y):=r(x,y)$ を x と y のリーマン距離とし，$\overline{xy}$ と略記する．さらに，$\mathrm{Exp}_x : T_xM\to M$ を x における指数写像とする．Exp_x の原点 $0\in T_xM$ での微分を計算すると，

$$\left(\mathrm{Exp}_x\right)_{*0} u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}_x(tu) = \dot\gamma_u(0) = u \qquad (u\in T_xM)$$

となる．ここで $\gamma_u(t)$ は $\gamma_u(0)=x$ かつ $\dot\gamma_u(0)=u$ となる測地線である．したがって $(\mathrm{Exp}_x)_{*0}$ は恒等写像となり，特に線形同形であるので，逆写像定理を用いて Exp_x は T_xM の 0 の近傍から x の近傍への微分同相写像であることが導かれ，次の補題が得られる．

補題 3.10 次の性質を満たす S_x $(x\in M)$ 上の連続関数 $r(\theta)$ （$\theta\in S_x$，ただし $0<r(\theta)<\infty$ を満たす）が存在する．

$$D(x) := \{r\,\theta\in T_xM|\, \theta\in S_x,\, 0\le r<r(\theta)\} \tag{3.60}$$

とすると，指数写像 Exp は次の性質を満たす．$\mathrm{Exp}_x : D(x)\to \mathrm{Exp}_x(D(x)) =: \widetilde{D}(x)$ は，上への微分同相であり，$\widetilde{D}(x)$ は M で開集合で，その M での補集合 $M\backslash\widetilde{D}(x)$ は測度 0 である．

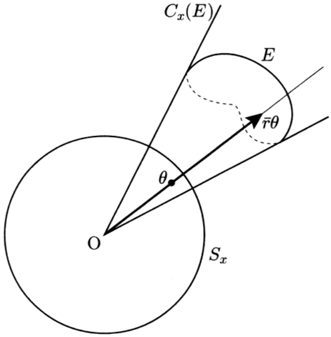


図 3.4　錐 $C_x(E)$

$\widetilde{D}(x)$ 内の点 $\mathrm{Exp}_x(r\,\theta)$ $(0 \le r < r(\theta), \theta \in S_x)$ を (r, θ) と表す (**測地極座標**という). このとき, (M, g) の体積要素 v_g は $\widetilde{D}(x)$ 上において,

$$\mathrm{Exp}_x{}^* v_g = \Theta(x, y)\, r^{n-1}\, dr\, d\theta \tag{3.61}$$

と表される. ここで (3.61) の左辺は, 指数写像 $\mathrm{Exp}_x : D(x) \to \widetilde{D}(x) \subset M$ による M 上の体積要素 v_g の引き戻しを表し, また, (3.61) の右辺における $d\theta$ は T_xM 上の内積 $g_x(\cdot, \cdot)$ により誘導される S_x 上の $(n-1)$ 次元ルベーグ測度を表し, $y = (r, \theta) = \mathrm{Exp}_x(r\,\theta) \in \widetilde{D}(x)$, $r = \overline{xy}$ である.

さらに, $D(x)$ 内の可測集合 E に対して, 次の集合を定義する：

$$C_x(E) := \{r\,\theta \in T_xM \,|\, r > 0 \text{ かつ } \theta \in S_x \text{ は } \overline{r}\,\theta \in E\, (\exists\, \overline{r} \in \mathbb{R}) \text{ を満たす.}\} \tag{3.62}$$

$C_x(E)$ を $0 \in T_xM$ を基点とし, E に関する**錐**(すい)という. $\widetilde{C}_x(E) := \mathrm{Exp}_x(C_x(E))$ とおく. このとき, 次の 4 つの補題が成り立つ.

補題 3.11　h を $\widetilde{D}(x)$ 上定義された定数でないリップシッツ関数とし, $D(x)$ 内の可測集合 E として $E := \{r\,\theta \in D(x) \,|\, h(r, \theta) = 0\}$ を取る. このとき,

$$\omega_x(E)\,|h(x)| \le \int_{\widetilde{C}_x(E)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(y) \right| \left(\Theta(x, y)\, \overline{xy}^{\,n-1} \right)^{-1} v_g(y), \tag{3.63}$$

ここで $\omega_x(E)$ は集合 $S_x \cap C_x(E)$ の S_x での $(n-1)$ 次元ルベーグ測度 $d\theta$ による測度である.

証明　$(r,\theta) = \mathrm{Exp}_x(r\,\theta) \in \widetilde{C}_x(E) = \mathrm{Exp}_x C_x(E)$ とすると，$\overline{r} \leq r(\theta)$ で，$h(\overline{r},\theta) = 0$ となるものが存在する．このとき，

$$|h(r,\theta)| \leq \int_0^{r(\theta)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta) \right| dr'. \tag{3.64}$$

実際，$\overline{r} \leq r$ とする ($r \leq \overline{r}$ のときも同様にできる)．このとき，

$$\begin{aligned}
(3.64)\text{ の右辺} := & \int_0^{r(\theta)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta) \right| dr' \\
\geq & \int_{\overline{r}}^{r} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta) \right| dr' \\
\geq & \left| \int_{\overline{r}}^{r} \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta)\, dr' \right| \\
= & \left| \Big[h(r',\theta) \Big]_{r'=\overline{r}}^{r'=r} \right| = |h(r,\theta) - h(\overline{r},\theta)| = |h(r,\theta)|
\end{aligned} \tag{3.65}$$

となるからである．さて，r を固定し，θ について，$S_x \cap C_x(E)$ 上で (3.64) の両辺を積分する：

$$\begin{aligned}
\int_{\theta \in S_x \cap C_x(E)} |\,h(r,\theta)\,|\, d\theta \leq & \int_{\theta \in S_x \cap C_x(E)} \int_0^{r(\theta)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta) \right| dr'\, d\theta \\
= & \int_{C_x(E)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(r',\theta) \right| dr'\, d\theta \\
= & \int_{\widetilde{C}_x(E)} \left| \frac{\partial h}{\partial r}(y) \right| \left(\Theta(x,y)\, \overline{xy}^{\,n-1} \right)^{-1} v_g(y)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

となる．ここで (3.61) 式を使った．ここで (3.66) において $r \downarrow 0$ とすると，左辺は $\Omega_x(E)\,|\,h(x)\,|$ に近づく．他方，右辺は r には依存しない量なので，(3.63) が成り立つ.□

補題 3.12　$\Theta(x,y) = \Theta(y,x)$ が成り立つ．

補題 3.12 の証明は次節で行う．

補題 3.13　$E \subset D(x)$ を可測集合とし，$\widetilde{E} := \mathrm{Exp}_x(E)$ とおく．このとき，$V(\widetilde{E}) := \mathrm{Vol}(\widetilde{E}) = \int_{\widetilde{E}} 1\, v_g$ とすれば，次式が成り立つ：

$$(\,\omega_x(E)\,)^{-1} \leq V(\widetilde{E})^{-1} \sup_{\theta \in S_x} \int_0^{r(\theta)} \Theta(x, (r,\theta))\, r^{n-1}\, dr, \tag{3.67}$$

ここで $n := \dim M$ である．

証明　実際，$\widetilde{E} \subset \widetilde{C}_x(E)$ なので，

$$\begin{aligned} V(\widetilde{E}) &\leq V(\widetilde{C}_x(E)) \\ &= \int_{\theta \in S_x \cap C_x(E)} \int_0^{r(\theta)} \Theta(x,\,(r,\,\theta))\, r^{n-1}\, dr\, d\theta \\ &\leq \omega_x(E) \sup_{\theta \in S_x} \int_0^{r(\theta)} \Theta(x,\,(r,\,\theta))\, r^{n-1}\, dr \end{aligned}$$

となる．□

次の補題は重要である：

補題 3.14　h を $\widetilde{D}(x)$ 上定義された定数でないリップシッツ関数とし，$E := \{\, r\,\theta \in D(x) \,|\, h(r,\theta) = 0\}$, $\widetilde{E} := \mathrm{Exp}_x(E)$ とする．このとき，次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \int_M |\,h\,|\, v_g \leq V(\widetilde{E})^{-1}\, d(M)\, \alpha(n) \left(\int_M |\nabla h|\, v_g \right) & \\ \times \left[\sup_{z \in M} \sup_{\theta \in S_z} \int_0^{r(\theta)} \Theta(z,\,(r,\,\theta))\, r^{n-1}\, dr \right], & \end{aligned} \tag{3.68}$$

ここで $d(M)$ は M の直径で，$\alpha(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の単位球面の表面積である．

証明　$\omega_x(E) > 0$ のとき，(3.63) の両辺を $\omega_x(E)$ で割り，x について M 上積分すると，

$$\int_M |h(z)|\ v_g(z) \leq \int_M \int_M \left|\frac{\partial h}{\partial r}(y)\right| \left(\omega_z(E)\,\Theta(z,y)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z)\,v_g(y),$$
$$\leq \left(\int_M |\nabla h|(y)\,v_g(y)\right)$$
$$\times \left(\sup_{y\in M}\int_M \left(\omega_z(E)\,\Theta(z,y)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z)\right). \tag{3.69}$$

ここで，(3.69) 式の右辺の $(\omega_z(E))^{-1}$ に補題 3.13 の (3.67) 式を代入すると，

$$\sup_{y\in M}\int_M \left(\omega_z(E)\,\Theta(z,y)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z)$$
$$\leq V(\widetilde{E})^{-1}\left(\sup_{z\in M}\sup_{\theta\in S_z}\int_0^{r(\theta)} \Theta(z,\,(r,\theta))\,r^{n-1}\,dr\right)$$
$$\times \sup_{y\in M}\int_M \left(\Theta(z,y)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z). \tag{3.70}$$

さらに補題 3.12 と (3.61) とを使って，

$$\sup_{y\in M}\int_M \left(\Theta(z,y)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z) = \sup_{y\in M}\int_M \left(\Theta(y,z)\,\overline{zy}^{n-1}\right)^{-1} v_g(z)$$
$$\leq \sup_{y\in M}\int_{S_y}\int_0^{r(\theta)} dr\,d\theta$$
$$\leq d(M)\,\alpha(n). \tag{3.71}$$

(3.69), (3.70), (3.71) を合わせて，(3.68) を得た．

$\omega_x(E)=0$ のときは，補題 3.13 の証明における不等式より，$V(\widetilde{E})=0$ となり，h は定数ではないので，(3.68) 式は明らかに正しい．□

証明　定理 3.7 を証明する．定数でない $f \in C^1(M)$ を任意に取る．このとき，実数 k を選び，

$$V(\{x\in M|\, f(x)<k\}) \leq \frac{1}{2}V(M),\ \text{かつ}\ V(\{x\in M|\, f(x)>k\}) \leq \frac{1}{2}V(M)$$

とできる．このとき，2つのリップシッツ関数 f_1 と f_2 を次のように定義する：

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) - k & f(x) \geq k \text{ のとき} \\ 0 & f(x) < k \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x) - k & f(x) \leq k \text{ のとき} \\ 0 & f(x) > k \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき f_i $(i = 1, 2)$ は次の条件を満たす：

$f(x) - k = f_1(x) + f_2(x)$,

$V(\{x \in M |\, f_1(x) = 0\}) \geq \frac{1}{2} V(M)$, $V(\{x \in M |\, f_2(x) = 0\}) \geq \frac{1}{2} V(M)$,

$\int_M |f - k|\, v_g = \int_M |\, f_1 \,|\, v_g + \int_M |\, f_2 \,|\, v_g$, かつ

$\int_M |\nabla f|\, v_g = \int_M |\,\nabla f_1 \,|\, v_g + \int_M |\,\nabla f_2\,|\, v_g$.

となる．ここで，これら f_i $(i = 1, 2)$ に補題 3.14 を適用して，

$$\int_M |f - k|\, v_g \leq 2\, V(M)^{-1}\, d(M)\, \alpha(n) \left(\int_M |\nabla f|\, v_g \right) \times \left[\sup_{z \in M} \sup_{\theta \in S_z} \int_0^{r(\theta)} \Theta(z, (r, \theta))\, r^{n-1}\, dr \right] \tag{3.72}$$

を得る．$f = c$（定数）のときは，定理 3.4 の証明の I-2 におけるリップシッツ関数 f_ε で近似する．この f_ε についても (3.72) 式が成立しており，(3.43) が成り立っていた．以上を合わせて，

$$\begin{aligned} I(M)^{-1} &= \left(\inf_{f \in C^1(M)} \frac{\int_M |\nabla f|\, v_g}{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f - \beta|\, v_g} \right)^{-1} \\ &= \sup_{f \in C^1(M)} \frac{\inf_{\beta \in \mathbb{R}} \int_M |f - \beta|\, v_g}{\int_M |\nabla f|\, v_g} \\ &\leq 2\, V(M)^{-1}\, d(M)\, \alpha(n) \left[\sup_{z \in M} \sup_{\theta \in S_z} \int_0^{r(\theta)} \Theta(z, (r, \theta))\, r^{n-1}\, dr \right] \end{aligned} \tag{3.73}$$

を得る．

ここで次の比較定理を用いる（その証明は次節で与える）.

定理 3.15　n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M, g) のリッチ曲率が次を満たすとする：

$$\text{リッチ曲率} \geq (n-1)\,K \tag{3.74}$$

ただし K は実数とする．$\frac{\sinh(\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ を定理 3.7 のように定める．このとき，任意の M における点 z と任意の $(r,\,\theta) \in \widetilde{D}(z)$ に対して，次式が成立する：

$$\Theta(z,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1} \leq \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}\,r)}{\sqrt{-K}}\right)^{n-1} \tag{3.75}$$

そこで，(3.75) を (3.73) に代入すると，$r(\theta) \leq d(M)$ なので，これから (3.14) が示され，定理 3.7 の証明が完了した.□

3.5　ヤコビ場と比較定理

本節では定理 3.15 と 補題 3.12 の証明を与える．以下，(M, g) をコンパクト n 次元リーマン多様体とし，$g_x(\,\cdot,\cdot)$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と略記する.

M 上の任意に取った固定点 $x \in M$ に対して，x における指数写像を

$$y = \mathrm{Exp}_x(r\,\theta),\ 0 \leq r < r(\theta), \theta \in S_x$$

とする（補題 3.10 参照）．2 点 y と x を結ぶ唯一の測地線を $\gamma(t) := \mathrm{Exp}_x(t\,\theta)$ $(0 \leq t \leq r)$ と書く．γ の $t=0$ での接ベクトルは $\dot\gamma(0) = \theta \in S_x$ である.

θ と直交する x での接ベクトルのなす空間 $\{v \in T_xM \,|\, \langle v, \theta\rangle = 0\}$ の基底を任意に一つ取り $\{y_i\}_{i=2}^n$ とする．$y_i(t)$ $(i=2,\ldots,n)$ を，x での接ベクトル y_i を測地線 γ に沿って $\gamma(t)$ まで平行移動してできる γ に沿ったベクトル場とする．このとき，$\{y_i(t)\}_{i=2}^n$ は一次独立で，$\langle y_i(t), \dot\gamma(t)\rangle = 0$ $(i=2,\ldots,n)$ を満たす.

さて，$i=2,\ldots,n$ に対して，$Y_i(t)$ $(0 \leq t \leq r)$ を，測地線 γ 上で，次の微分方程式系と初期条件を満たす解とする（測地線 γ に沿った**ヤコビ場**と呼ば

れている)：

$$\nabla_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}Y_i)+R(Y_i,\dot\gamma)\dot\gamma=0, \tag{3.76}$$

ここで γ に沿ったベクトル場 Y に対して，$\nabla_{\dot\gamma}Y$ は $\dot\gamma$ に関する g のレビ・チビタ接続に関する Y の共変微分を表し，R は g の曲率テンソルを表す．$Y_i(t)$ $(0\le t\le r;\ i=2,\dots,n)$ に対する初期条件は

$$Y_i(0)=0, \quad \text{かつ} \quad Y_i{}'(0)=y_i \tag{3.77}$$

とする．以下では $Y'(t):=(\nabla_{\dot\gamma}Y)_{\gamma(t)}$ であるものとする．このとき次の補題が成り立つ．

補題 3.16

(1)　$\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle=0 \quad (i=2,\dots,n)$,

(2)　$(\mathrm{Exp}_x)_{*\,r\,\theta}(r\,y_i)=Y_i(r)\ (i=2,\dots,n)$.

ここで指数写像 $\mathrm{Exp}_x:T_xM\to M$ の $r\,\theta\in T_xM$ での微分を $(\mathrm{Exp}_x)_{*\,r\,\theta}:T_{r\,\theta}(T_xM)=T_xM\to T_{\mathrm{Exp}_x(r\,\theta)}M=T_{\gamma(r)}M$ と表す．

証明　(1) t の関数 $\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle$ を t で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle&=\langle\nabla_{\dot\gamma}Y_i,\dot\gamma\rangle+\langle Y_i,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle &&(\text{レビ・チビタ接続 }\nabla\text{ の性質})\\&=\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y_i)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle &&(\gamma\text{ は測地線なので }\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0)\\&=\langle\nabla_{\dot\gamma}Y_i,\dot\gamma\rangle. &&(3.78)\end{aligned}$$

(3.78) の両辺をさらに t で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle&=\langle\nabla_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}Y_i),\dot\gamma\rangle+\langle\nabla_{\dot\gamma}Y_i,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle\\&=-\langle R(Y_i,\dot\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma\rangle &&((3.76)\text{ と }\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0\text{ より})\\&=0. &&(\text{曲率テンソルの性質})\ (3.79)\end{aligned}$$

(3.79) より，$\frac{d}{dt}\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle$ は t について定数となる．特に $t=0$ のとき，(3.78) 式の右辺は (3.77) より，

$$\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y_i)_{\gamma(0)},\dot\gamma(0)\rangle=\langle y_i,\dot\gamma(0)\rangle=0 \tag{3.80}$$

となる．最後の等式で y_i $(i=2,\dots,n)$ が $\dot\gamma$ と直交するように取っていることを使った．以上より，$\frac{d}{dt}\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle\equiv 0$ を得る．ゆえに，$\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle$ は t について定数である．ところが $Y_i(0)=0$ に取っているので，結局，求める結論 $\langle Y_i(t),\dot\gamma(t)\rangle\equiv 0$ を得た．

(2)（第1段）各 $i=2,\dots,n$ について，十分小さな正数 $\varepsilon>0$ を取り，C^∞ 写像 $K:(-\varepsilon,\varepsilon)\times(0,r)\to M$ を，$K(s,t):=\mathrm{Exp}_x(t\,(\theta+s\,y_i))$ $(-\varepsilon<s<\varepsilon,\ 0\leq t\leq r)$ によって定義すると，

(i) 各 s に対して，$t\mapsto c_s(t):=K(s,t)$ は測地線である．

(ii) $s=0$ のとき，$K(0,t)=\mathrm{Exp}_x(t\,\theta)=\gamma(t)$ である．

（第2段）これらのことは，$K(s,t)$ が測地線 γ の変分を与えていることを意味している．このとき，$K(s,t)$ から $\gamma(t)$ に沿って無限小変分ベクトル場 $Y(t)$ が次のように定義されている：任意の $f\in C^\infty(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}Y(t)f&:=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}f(K(s,t))=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}f(\mathrm{Exp}_x(t\,(\theta+s\,y_i)))\\&=(\mathrm{Exp}_x)_{*\ t\,\theta}(t\,y_i)f.\end{aligned}\tag{3.81}$$

（第3段）したがって，$t\mapsto Y(t)=(\mathrm{Exp}_x)_{*\ t\,\theta}(t\,y_i)$ は γ に沿ったヤコビ場を与え，$Y(t)$ は微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}Y)+R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=0\tag{3.82}$$

を満たす．というのは，各 c_s が測地線であるので，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}=0$．このとき，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y(t)=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{(t,0)}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{(t,0)}.\tag{3.83}$$

ここで $[\frac{\partial K}{\partial t},\frac{\partial K}{\partial s}]=0$ を使った．さらに，(3.83) より，

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y(t)\right)&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{(t,0)}\right)\\&=\nabla_{\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}\right)+R\left(\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{(t,0)},\left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{(t,0)}\right)\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{(t,0)}\end{aligned}$$

$$= R(\dot{\gamma}, Y(t))\dot{\gamma} \tag{3.84}$$

となるからである．

（第 4 段）$Y(t)$ は初期条件

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = y_i \tag{3.85}$$

を満たす．実際，x を中心，T_xM の基底 $\{\theta, y_2, \ldots, y_n\}$ に関する正規座標系を $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ とすると，$K(s,t)$ の定義より，

$$x^1(K(s,t)) = t;\ x^j(K(s,t)) = s\,t\,\delta_{ij} \quad (j = 2, \ldots, n) \tag{3.86}$$

である．この座標系を使って $Y(t)$ を $Y(t) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x^j}$ とおくと，$Y(t)$ の成分 ξ_j $(j = 1, \ldots, n)$ は次のようになる．

$$\xi_j(t) = \left.\frac{\partial\, x^j(K(s,t))}{\partial s}\right|_{s=0} = \begin{cases} t\,\delta_{ij} & (j = 2, \ldots, n) \\ 0 & (j = 1). \end{cases} \tag{3.87}$$

特に，$Y(0) = 0$ である．さらに，$Y'(0)$ については，(3.93) より，

$$\begin{aligned} Y'(0) &= (\nabla_{\dot{\gamma}} Y)_{\gamma(0)} = \sum_{j=1}^n \xi_j{}'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(0)} = \sum_{j=2}^n \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(0)} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(0)} = y_i \end{aligned} \tag{3.88}$$

となるから．ここで 2 番目の等式で，$(x^1, \ldots, x^n)$ は x のまわりの正規座標系なので，$(\nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^j})_{\gamma(0)} = 0$ であることを使った．

（第 5 段）以上より，$Y(t)$ は初期条件 (3.85) を満たす常微分方程式系 (3.82) の解であることがわかった．初期値問題の解の一意性により，$Y_i(t) = Y(t)$，特に，$Y_i(r) = Y(r) = (\mathrm{Exp}_x)_{*\ r\,\theta}(r\,y_i)$ を得る．□

定理 3.15 の証明を行う．

（第 1 段）さて

$$\mathrm{Exp}_x{}^* v_g = \Theta(x,\, (r,\, \theta))\, r^{n-1}\, dr\, d\theta \tag{3.89}$$

であり，$r^{n-1}\,dr\,d\theta$ は T_xM 上の内積 $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ に関するユークリッド空間としてのルベーグ測度である．補題 3.16 と $(\mathrm{Exp}_x)_{*\,r\,\theta}(\theta)=\dot\gamma(r)$ であるので，

$$\Theta(x,\,(r,\,\theta))=\det\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&\cdots&0\\\hline 0&&&\\ \vdots&&\langle\,Y_i(r),\,Y_j(r)\rangle&\\ 0&&&\end{array}\right)^{\frac{1}{2}}\det\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&\cdots&0\\\hline 0&&&\\ \vdots&&\langle\,r\,y_i,\,r\,y_j\rangle&\\ 0&&&\end{array}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.90}$$

となる．ゆえに，$j=2,\ldots,n$ に対して，

$$Y_j(t)=\sum_{i=2}^{n}a_{ij}(t)\,y_i(t),\qquad \text{ここで}\quad A(t):=\Big(a_{ij}(t)\Big)_{i,j=2,\ldots,n} \tag{3.91}$$

とおくと，

$$\Theta(x,\,(r,\,\theta))=\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{|\det(A(r))|}{\left\{\det\Big(\langle y_i,y_j\,\rangle\Big)\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{3.92}$$

を得る．したがって，$F'=\frac{dF}{dr}$ と表記すると，

$$\begin{aligned}\frac{\Theta'}{\Theta}&=\frac{\frac{d}{dr}\Big(r^{-(n-1)}\,\det(A(r))\Big)}{r^{-(n-1)}\,\det(A(r))}\\&=\det(A(r))^{-1}\,\frac{d}{dr}\det(A(r))-\frac{n-1}{r}\\&=\det(A(r))^{-1}\,\frac{d}{dr}\,\Big(e^{\mathrm{Trace}\ \log A(r)}\Big)-\frac{n-1}{r}\\&=\det(A(r))^{-1}\,e^{\mathrm{Trace}\ \log A(r)}\,\mathrm{Trace}\Big(A(r)^{-1}\,A'(r)\Big)-\frac{n-1}{r}\\&=\mathrm{Trace}\Big(A(r)^{-1}\,A'(r)\Big)-\frac{n-1}{r}.\end{aligned} \tag{3.93}$$

（第2段）今，$\{y_i\}_{i=2}^{n}$ を適切に選び，$t=r$ において，$\{Y_i(r)\}_{i=2}^{n}$ が内積 $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ に関して正規直交系となるように取っておく：$\langle Y_i(r),Y_j(r)\rangle=\delta_{ij}$.

$${}^{t}\!A(r)\Big(\langle y_i,y_j\rangle\Big)A(r)=I\quad(\text{単位行列})$$

なので

$$\sum_{i=2}^{n}\langle Y_i(r), {Y_i}'(r)\rangle = \mathrm{Trace}\left({}^t\!A(r)\left(\langle y_k, y_\ell\rangle\right)_{k,\ell=2,\ldots,n} A'(r)\right)$$
$$= \mathrm{Trace}\left(A(r)^{-1} A'(r)\right). \tag{3.94}$$

(3.93) と (3.94) より，次式を得る：

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \sum_{i=2}^{n}\langle Y_i(r), {Y_i}'(r)\rangle - \frac{n-1}{r}. \tag{3.95}$$

（第 3 段）ここで次の命題を使う．証明は [35], Vol. II, p.72, [47] p.127, [53] p.143 などを見よ．

命題 3.17　$\gamma : [0,c] \to M$ を $x = \gamma(0)$ となる測地線で弧長 t によりパラメータ化されているとし，γ 上に x の共役点はないとする．すなわち，γ 上恒等的には零でないヤコビ場 $W(t)$ で，$W(0) = 0$ かつ $W(c) = 0$ となるものは存在しないとする．Y を γ に沿ったヤコビ場で，$\langle Y, \dot\gamma\rangle = 0$ かつ $Y(0) = 0$ を満たすものとする．このとき γ に沿った任意の C^∞ ベクトル場 X で，$\langle X, \dot\gamma\rangle = 0$ かつ $X(0) = 0$ かつ $X(c) = Y(c)$ を満たすものに対して，

$$I_0^c(X) \geq I_0^c(Y) \tag{3.96}$$

が成り立ち，等号が成立するのは $X = Y$ となるものに限る．ここで

$$I_0^c(X) := \int_0^c \left(\langle X'(t), X'(t)\rangle - \langle R(X(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t), X(t)\rangle\right) dt \tag{3.97}$$

とする．

（第 4 段）さて，$Y_i(t)$ $(0 \leq t \leq r; i = 2, \ldots, n)$ は γ に沿ったヤコビ場で，$\langle Y_i, \dot\gamma\rangle = 0$ かつ $Y_i(0) = 0$ を満たすので，先程の命題 3.17 より，

$$
\begin{aligned}
\langle Y_i(r), {Y_i}'(r)\rangle &= \int_0^r \Big(\langle {Y_i}', {Y_i}'\rangle - \langle R(Y_i, \dot\gamma)\dot\gamma, Y_i\rangle\Big)\, dt \\
&= I_0^r(Y_i) \\
&\le I_0^r(W_i) \\
&= \int_0^r \Big(\langle {W_i}', {W_i}'\rangle - \langle R(W_i, \dot\gamma)\dot\gamma, W_i\rangle\Big)\, dt
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

が γ に沿った任意の C^∞ ベクトル場 W_i で，$\langle W_i, \dot\gamma\rangle = 0$ かつ $W_i(0) = 0$, $W_i(r) = Y_i(r)$ を満たすものに対して成り立つ.

（第5段）そこで, W_i として, 次のようなものを選んでおく：まず, $\{E_i(t)\}_{i=2}^n$ を γ に沿って平行なベクトル場で，$\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ $(2 \le i, j \le n)$, $\langle E_i(t), \gamma(t)\rangle = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$ かつ $E_i(r) = Y_i(r)$ $(i = 2, \ldots, n)$ を満たすものを取り，$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ として，$g(0) = 0$ かつ $g(r) = 1$ を満たすものとし，$W_i(t) := g(t)\, E_i(t)$ とおく．この W_i について (3.98) を適用すると，E_i が平行ベクトル場なので，${W_i}'(t) = g'(t)\, E_i(t)$ だから，

$$
\langle Y_i(r), {Y_i}'(r)\rangle \le \int_0^r \{(g')^2 - g^2 \langle R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma, E_i\rangle\}\, dt \tag{3.99}
$$

を得る．(3.99) において $i = 2, \ldots, n$ について和を取って，

$$
\sum_{i=2}^n \langle Y_i(r), {Y_i}'(r)\rangle \le \int_0^r \left\{(n-1)\,(g')^2 - g^2 \sum_{i=2}^n \langle R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma, E_i\rangle\right\} dt. \tag{3.100}
$$

（第6段）ここで，

$$
\text{リッチ曲率} \ge (n-1)\, K
$$

とする．ただし $K \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$
\sum_{i=2}^n \langle R(E_i, \dot\gamma)\dot\gamma, E_i\rangle = \rho(\dot\gamma, \dot\gamma) \ge (n-1)\, K \tag{3.101}
$$

となる．ここで ρ はリッチテンソルを表す．以上より，

$$
(3.100)\ \text{の右辺} \le (n-1) \int_0^r \{(g')^2 - K\, g^2\}\, dt \tag{3.102}
$$

となる．これで次式を得た：

$$\frac{\Theta'}{\Theta} \leq (n-1)\left\{ \int_0^r \left((g')^2 - K\, g^2 \right) dt - \frac{1}{r} \right\}. \tag{3.103}$$

（第7段）ここで (3.103) 式の右辺の積分 $\int_0^r \left((g')^2 - K\, g^2\right) dt$ についてであるが，これは 定曲率空間 K の空間において，E を測地線に沿って平行なベクトル場で，$\langle E, E\rangle = 1$ となるものとし，$g \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $g(0)=0$, $g(r)=1$ として，ベクトル場 $g\,E$ を考えると，

$$I_0^r(gE) = \int_0^r ((g')^2 - K\, g^2)\, dt$$

である．$g\,E$ が定曲率空間のヤコビ場のとき，その最大値を与える．このとき (3.82) 式は $g'' + K\, g = 0$ となる．その $g(0)=0$ かつ $g(r)=1$ となる解は，

(i) $K > 0$ のとき，$g(t) = \frac{\sin(\sqrt{K}\, t)}{\sqrt{r}}$,

(ii) $K = 0$ のとき，$g(t) = \frac{t}{r}$,

(iii) $K < 0$ のとき，$g(t) = \frac{\sinh(\sqrt{-K}\, t)}{\sinh(\sqrt{-K}\, r)}$,

となる．このとき，更に，

$$\langle g(r)\, E, g'(r)\, E\rangle = I_0^r(g\, E) = \begin{cases} \sqrt{K}\, \dfrac{\cos\sqrt{K}\, r}{\sin\sqrt{K}\, r} & (K>0) \\[2ex] \dfrac{1}{r} & (K=0) \\[2ex] \sqrt{-K}\, \dfrac{\cosh\sqrt{-K}\, r}{\sinh\sqrt{-K}\, r} & (K<0) \end{cases}$$

となる．

（第8段）(i) のとき，(3.103) は

$$\frac{\Theta'}{\Theta} \leq (n-1)\left\{ \sqrt{K}\, \frac{\cos\sqrt{K}\, r}{\sin\sqrt{K}\, r} - \frac{1}{r} \right\}. \tag{3.104}$$

$q \in (0, t)$ に対して，

$$\Big[\log\Theta\Big]_{r=q}^{r=t} = \int_q^t \frac{\Theta'}{\Theta}\, dr \leq (n-1) \int_q^t \left\{ \sqrt{K}\, \frac{\cos\sqrt{K}\, r}{\sin\sqrt{K}\, r} - \frac{1}{r} \right\} dr. \tag{3.105}$$

これから，

$$\frac{\Theta(t)}{\Theta(q)} \leq \left(\frac{\sqrt{K}\,q}{\sqrt{K}\,t}\,\frac{\sin\sqrt{K}\,t}{\sin\sqrt{K}\,q}\right)^{n-1},$$

すなわち，

$$\Theta(t)\left(\frac{\sqrt{K}\,t}{\sin\sqrt{K}\,t}\right)^{n-1} \leq \Theta(q)\left(\frac{\sqrt{K}\,q}{\sin\sqrt{K}\,q}\right)^{n-1} \tag{3.106}$$

を得る．ここで，$q \to 0$ として，$\Theta(0) = 1$ より，(3.106) $\to 1$. ゆえに，求める式を得た：

$$\Theta(t) \leq \left(\frac{\sin\sqrt{K}\,t}{\sqrt{K}\,t}\right)^{n-1}. \tag{3.107}$$

(ii) $K = 0$, (iii) $K < 0$ の場合も同様である．こうして，定理 3.15 の証明が完了した． □

証明　今度は，残された補題 3.12 の証明を行う．

（第1段）$\theta \in S_x := \{X \in T_xM \,|\, \langle X, X\rangle = 1\}$ とし，$\{y_i\}_{i=2}^n$ を $\{v \in T_xM \,|\, \langle v, \theta\rangle = 0\}$ の正規直交基底とする．弧長によってパラメータ化された測地線 $\gamma(t)\,(0 \leq t \leq r)$ 上の C^∞ ベクトル場 $\{Y_j(t)\}_{j=2}^n$ はヤコビ場であって，初期条件 $Y_j(0) = 0$ かつ ${Y_j}'(0) = y_j$ を満たすものとする．ここで測地線 $\gamma(t)\,(0 \leq t \leq r)$ に沿ったベクトル場 $Y_j(t)$ がヤコビ場であるとは，

$$\nabla_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma} Y_j) + R(Y_j, \dot\gamma)\dot\gamma = 0 \tag{3.108}$$

を満たすもののことであった．

（第2段）ここで $Y_j(t) = \sum_{i=2}^n a_{ij}(t)\,y_i(t)$ とし，$A(t) := (a_{ij}(t))_{i,j=2,\ldots,n}$ とおく．$R(\dot\gamma, y_j(t))\dot\gamma = \sum_{i=2}^n K_{ij}(t)\,y_i(t)$ とおいて，$n-1$ 次の行列 $K(t) := (K_{ij}(t))_{i,j=2,\ldots,n}$ を定義する．このとき，$K(t)$ は対称行列である．なぜなら，

$$K_{ij}(t) = \langle R(y_j(t), \dot\gamma)\dot\gamma, y_i(t)\rangle = \langle R(y_i(t), \dot\gamma)\dot\gamma, y_j(t)\rangle = K_{ji}(t)$$

となるからである．

（第3段）$Y_j\,(j = 2, \ldots, n)$ が初期条件 $Y_j(0) = 0$ かつ ${Y_j}'(0) = y_j$ を満たすヤコビ場である必要十分条件は，

$$A''(t) + K(t) \circ A(t) = 0 \tag{3.109}$$

$$A(0) = 0,\ A'(0) = I \tag{3.110}$$

である．ここで $K(t) \circ A(t)$ は行列の積を表し，I は $(n-1)$ 次の単位行列を表す．

実際，(3.108) 式に $Y_j(t) = \sum_{i=2}^{n} a_{ij}(t)\, y_i(t)$ を代入して計算する．$y_i(t)$ が平行ベクトル場であるので，$\nabla_{\dot\gamma} y_i =$ を満たす．このことから，(3.108) が成り立つ必要十分条件は

$$a_{ij}{}''(t) + \sum_{k=2}^{n} K_{ik}(t)\, a_{kj}(t) = 0 \tag{3.111}$$

であり，(3.111) 式は (3.109) 式を行列成分表示したものに他ならないからである．(3.110) 式も同様である．

（第 4 段）$\{y_i\}_{i=2}^{n}$ は正規直交系なので，(3.92) より，

$$\Theta(x,y) = \frac{1}{r^{n-1}}\, |\det(A(r)\,|, \quad (y = (r,\, \theta)) \tag{3.112}$$

である．

（第 5 段）さて，いま $B(t)$ として (3.109) の解，つまり，

$$B''(t) + K(t) \circ B(t) = 0 \tag{3.113}$$

を満たし，初期条件

$$B(r) = 0, \quad B'(r) = -I \tag{3.114}$$

を満たすものを取る．このとき，

$$\Theta(y,x) = \frac{1}{r^{n-1}}\, |\det(B(0))\,| \tag{3.115}$$

となる．実際，測地線 γ を逆向きにたどる測地線を $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(r-t)$ とすれば，$\widetilde{\gamma}(0) = y$, $\widetilde{\gamma}(r) = x$, $\dot{\widetilde{\gamma}}(0) = -\dot\gamma(r)$ である．ここで，$\widetilde{y}_i(t) := y_i(r-t)$, $\widetilde{Y}_j(t) := \sum_{i=2}^{n} \widetilde{a}_{ij}(t)\, \widetilde{y}_i(t)$ を考える．ただし，$\widetilde{a}_{ij}(t) := b_{ij}(r-t)$ とする．このとき，$\widetilde{Y}_j$ は測地線 $\widetilde{\gamma}$ に沿ったヤコビ場となり，初期条件 $\widetilde{Y}_j(0) = 0$, $\widetilde{Y}_j{}'(0) = \widetilde{y}_j(0)$ を満たすことが確かめられる．これらのことから，

$$\Theta(y,x) = \frac{1}{r^{n-1}}\, |\det(\,\widetilde{A}(r)\,)\,| = \frac{1}{r^{n-1}}\, |\det(B(0))\,| \tag{3.116}$$

を得る．これは (3.115) である．

（第6段）ところが，$A(t)$ と $B(t)$ とは次のように関係している：

$$ {}^tA'(t)\,B(t) - {}^tA(t)\,B'(t) \quad \text{は } t \text{ に依存しない定数である．} \tag{3.117} $$

実際，(3.117) における式を t で微分してみると，(3.117) の式の t に関する微分は

$$ \begin{aligned} &{}^tA''(t)\,B(t) + {}^tA'(t)\,B'(t) - {}^tA'(t)\,B'(t) - {}^tA(t)\,B''(t) \\ &\quad = (-{}^tA(t)\,{}^tK(t))\,B(t) - {}^tA(t)\,(-K(t)\,B(t)) \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{3.118} $$

となるからである．ここで $A(t)$ と $B(t)$ が共に (3.109) を満たし，${}^tK(t) = K(t)$ であることを使った．

（第7段）以上より，(3.117) において，$t=0$ と $t=r$ とを比較して，

$$ {}^tA'(0)\,B(0) - {}^tA(0)\,B'(0) = {}^tA'(r)\,B(r) - {}^tA(r)\,B'(r) \tag{3.119} $$

を得る．ここで，A と B の初期条件は，${}^tA'(0) = I$, ${}^tA(0) = 0$; $B(r) = 0$, $B'(r) = -I$ であった．これらを (3.119) に代入して，$B(0) = {}^tA(r)$ を得た．したがって，(3.116) と合わせて，

$$ \Theta(y,x) = \frac{1}{r^{n-1}}\left|\det(B(0))\right| = \frac{1}{r^{n-1}}\left|\det({}^tA(r))\right| = \Theta(x,y) \tag{3.120} $$

を得た．(3.120) は求める式である．□

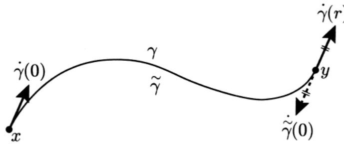


図 3.5 測地線 γ と $\tilde\gamma$

第4章 ◇ 第k固有値の評価とリヒネロヴィッツ・小畠の定理

本章では，始めにクーラント (R. Courant) によるラプラス作用素の第 $\boldsymbol{k}$ 固有関数に対する節領域定理を述べ，その応用としてチェン (S.Y. Cheng) による第 $\boldsymbol{k}$ 固有値の上からの評価についての結果を述べ，トポノゴフ (V.A. Toponogov) の球面定理を紹介する.

一方，リッチ曲率が正定数で下から評価されているときの最小正固有値に対する下からの評価について，古典的なリヒネロヴィッツ (A. Lichnerowicz)・小畠守生の定理を紹介する.

4.1 R. クーラントの節領域定理

一般に楕円型作用素の固有関数の零点集合を，その関数の**節** (nodal set) と呼び，その補集合の連結成分を**節領域** (nodal domain) と呼ぶ．節領域の個数が増すにつれて，その固有関数は，より複雑になってゆくものと考えられる．R. クーラント の古典的な節領域定理はラプラス作用素の固有関数の節領域の個数の評価を与えたものである．その定理に依れば，若い番号の固有関数であるほど単純であり，番号が増えるに従い，複雑さが増してゆくということである.

最初に，リーマン多様体内における領域上のディリクレ境界値問題の一般的事実を復習し，その後，節領域定理を述べよう.

4.1.1 ラプラス作用素の境界値問題

(M,g) を n 次元連結な完備リーマン多様体とする（コンパクトは仮定しない)．Δ を (M,g) のラプラス作用素とする．$D\subset M$ を M の開領域で，その

閉包 $\overline{D}$ がコンパクトであるものとする．$\partial D := \overline{D}\backslash D$ で D の境界を表すとする．$\overline{D}$ で定義された恒等的には零でない関数 φ が

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \nu\varphi & (D \text{ 上で}) \\ \varphi = 0 & (\partial D \text{ 上で}) \end{cases} \tag{4.1}$$

を満たすとき，ν を D 上のディリクレ境界値固有値問題の**固有値**と呼び，φ をその固有値の**固有関数**と呼ぶ．(4.1) は D 上の**固定膜の境界値問題**とも呼ばれている．

D の境界 ∂D が区分的に滑らかであるとき，(4.1) の固有値全体は $\mathbb{R}$ 内の離散集合をなし，各固有値の固有空間は有限次元となる．固有値を重複度を込めて並べ，

$$(0<)\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_k \leq \cdots \tag{4.2}$$

と書くと，$\nu_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ である．0 は固定膜の境界値問題の固有値とはなり得ず，$0 < \nu_1$ となる．なぜならば，ν を (4.1) の固有値とし，$\varphi \not\equiv 0$ をその固有関数とすれば，$\nu\|\varphi\|^2 = (\Delta\varphi, \varphi) = (\nabla\varphi, \nabla\varphi) \geq 0$ となる．$\nu = 0$ が Δ の固有値とすれば，$\nabla\varphi = 0$ となるので，φ は D 上定数関数である．境界条件 $\varphi = 0$ (∂D 上) より，$\varphi \equiv 0$ となり，これは $\varphi \not\equiv 0$ に反するからである．

D 上の連続関数に対して，**L^2-内積**と **L^2-ノルム**を，

$$(\varphi, \psi) := \int_D \varphi\,\psi\, v_g, \quad \|\varphi\|^2 := (\varphi, \varphi) \tag{4.3}$$

と定義する．ここで v_g はリーマン多様体 (M, g) の体積要素を表す．このとき，(M, g) のラプラス作用素 Δ の相異なる固有値に対する固有空間はこの L^2-内積に関して直交し，各固有値 ν_i に対する固有関数 φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ として，$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ を満たすように取り，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ が

$$L^2(D) := \{\varphi |\, D \text{ 上の関数で，} \|\varphi\| < \infty \text{ を満たす}\}$$

の完全正規直交系をなすようにできる：任意の $\varphi \in L^2(D)$ に対して，

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_i)\,\varphi_i, \quad \text{すなわち} \quad \left\|\varphi - \sum_{i=1}^{N} (\varphi, \varphi_i)\,\varphi_i\right\| \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

が成り立つ．

他方，(M, g) がコンパクト・リーマン多様体で，$\partial M = \emptyset$ の場合，

$$\Delta u = \lambda u \quad (M \text{ 上で}) \tag{4.4}$$

の固有値 λ と固有関数 u を求める問題は**自由膜の問題**と呼ばれている．これまでのように，(4.4) の固有値を重複度を込めて

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \tag{4.5}$$

と書くと，$\lambda_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ である．

実際，$0 = \lambda_1 < \lambda_2$ となることは次のようにしてわかる．命題 1.4 (2) より

$$\int_M g(\mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(u))\, v_g = \int_M (\Delta u)\, u\, v_g. \tag{\#}$$

ゆえに，定数 λ が (4.4) の固有値，つまり $\Delta u = \lambda u$ (M 上) かつ $u \not\equiv 0$ となる M 上の関数 u をもてば，(#) より

$$\lambda = \frac{\int_M g(\mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(u))\, v_g}{\int_M u^2\, v_g} \geq 0.$$

$\Delta u = 0$ (M 上) ならば，(#) より $\mathrm{grad}(u) = 0$ となり，u は M 上定数である．よって $\dim\{u \in C^\infty(M) | \Delta u = 0\} = 1$ かつ，$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ となる．

4.1.2 R. クーラントの節領域定理

有名な R. クーラントの節領域定理を述べよう（[21], 第 2 巻，p.160）．

定理 4.1 (1) 固定膜の境界値問題 (4.1) の第 k 番目の固有値 ν_k の固有関数の節領域の個数は k 以下である．

(2) 自由膜の固有値問題 (4.4) の第 k 番目の固有値 λ_k の固有関数の節領域の個数も k 以下である．

系 4.2　特に,

(1) 固定膜の境界値問題 (4.1) の第 2 固有値 ν_2 の節領域の個数は丁度 2 である.

(2) 自由膜の固有値問題 (4.4) の第 2 固有値 λ_2 の節領域の個数も丁度 2 である.

証明　初めに, 系 4.2 の証明をする.

(1) 定理 4.1 (1) より, φ_1 の節領域の個数は 1 である. このことは (零点はもつかもしれないが) φ_1 が D 上の至るところで同一の符号をもつことを意味する. 一方, $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ としていたので, これが成り立つためには, φ_2 は D 上で符号を変えなければならない. ゆえに, φ_2 の節領域の個数は 2 以上である. 定理 4.1 (1) より, φ_2 の節領域の個数は丁度 2 でなければならない.

(2) u_1 は定数関数であり, $(u_2, u_1) = 0$ より, u_2 は符号を変えなければならない. (1) と同様にして, u_2 の節領域の個数は 2 であることがいえる.□

証明　定理 4.1 の証明をする. (1) の場合のみ示す. (2) の場合も同様にできる. M 内の領域 D に対する (4.1) の第 k 固有値を ν_k, 第 k 固有関数を φ_k とし, φ_k の節領域の個数が $k+1$ 以上であるとして, 矛盾を導く.

(第1段) いま, $D_1, D_2, \ldots, D_k, D_{k+1}, \ldots$ を φ_k の節領域とする. $1 \leq j \leq k$ に対して,

$$
{\varphi_k}^j := \begin{cases} \varphi_k & (D_j \text{ 上で}) \\ 0 & (D_j \text{ の外で}) \end{cases} \tag{4.6}
$$

とおく. このとき, $\{{\varphi_k}^j\}_{j=1}^k$ は一次独立なので, どれかは零でない実数 $a_1, \ldots, a_k$ を選び, $\widetilde{\varphi} := \sum_{j=1}^k a_j\, {\varphi_k}^j$ としたとき,

$$
(\widetilde{\varphi}, \varphi_\ell) := \int_D \widetilde{\varphi}\, \varphi_\ell\, v_g = 0 \qquad (\text{すべての } \ell = 1, \ldots, k-1 \text{ に対して}) \tag{4.7}
$$

となるようにできる.

ここで証明は同様にできるので与えないが, 命題 2.13 及び注意 2.14 と同様の結果が領域 D 上の固定膜の境界値固有値問題 (4.1) とその固有値 (4.2)

についても成り立つことに注意しよう．したがって，固有値 ν_k の次の評価を得る：

$$\begin{aligned}
\nu_k &= \inf_{\substack{\varphi=0\,(\partial D\,\text{上}),\\ (\varphi,\varphi_\ell)=0\ (\forall\ \ell=1,\ldots,k-1)}} \frac{\int_D \langle\nabla\varphi,\nabla\varphi\rangle\,v_g}{\int_D \varphi^2\,v_g} && (\text{命題 2.13, 注意 2.14 と同様})\\
&\le \frac{\int_D \langle\nabla\widetilde{\varphi},\nabla\widetilde{\varphi}\rangle\,v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\,v_g} && ((4.7)\text{ より})\\
&= \frac{\sum_{j=1}^k {a_j}^2 \int_{D_j} \langle\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_k\rangle\,v_g}{\sum_{j=1}^k {a_j}^2 \int_{D_j} {\varphi_k}^2\,v_g} && (\widetilde{\varphi}\text{ の定義}). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

（第 2 段）あとの命題 4.4 で，φ_k の節（今の場合は ∂D_j $(j=1,2,\ldots)$ の和集合）は，$(n-1)$ 次元測度が 0 の閉集合を除いて $(n-1)$ 次元 C^∞ 多様体となることを示す．$\varphi_k = 0$ (D_j 上で) なのでグリーンの公式（命題 1.4）が使えて，

$$\begin{aligned}
\int_{D_j} \langle\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_k\rangle\,v_g &= \int_{D_j} (\Delta\varphi_k)\,\varphi_k\,v_g\\
&= \nu_k \int_{D_j} {\varphi_k}^2\,v_g. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

(4.9) を (4.8) の 右辺に代入して，(4.8) の右辺 $=\nu_k$ を得る．つまり，(4.8) の 2 番目の式は等号成立，すなわち，

$$\nu_k = \frac{\int_D \langle\nabla\widetilde{\varphi},\nabla\widetilde{\varphi}\rangle\,v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\,v_g}. \qquad (4.10)$$

（第 3 段）(4.10) により，$\widetilde{\varphi}$ は D 上 C^∞ 関数であり，しかも，$\Delta\widetilde{\varphi} = \nu_k\,\widetilde{\varphi}$ を満たす．なぜならば，$\widetilde{\varphi}$ は $\overline{D}$ 上連続であるので，D 上のディリクレ固有値問題の固有関数を用いて展開した級数 $\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^\infty b_i\,\varphi_i$ は $\overline{D}$ 上一様収束である．他方，第 1 段における $\widetilde{\varphi}$ の定義より，$\widetilde{\varphi}$ は各 D_j $(j=1,\ldots,k)$ 上で C^∞ である．したがって，その上の各点において，$\nabla\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^\infty b_i\,\nabla\varphi_i$ を満たし，D 上の L^2 内積 $\|\cdot\|_{L^2(D)}$ に関して収束している．また，(4.7) より $b_\ell = (\widetilde{\varphi},\varphi_\ell) = 0$ $(\ell = 1,\ldots,k-1)$．したがって，(4.10) は

$$
\begin{aligned}
\nu_k &= \frac{\int_D \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi}\rangle\, v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\, v_g} = \frac{\sum_{j=1}^k \int_{D_j} \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi}\rangle\, v_g}{\sum_{j=1}^k \int_{D_j} \widetilde{\varphi}^2\, v_g} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty {b_i}^2 \int_{D_j} \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_i\rangle\, v_g}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty {b_i}^2 \int_{D_j} {\varphi_i}^2\, v_g} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^\infty {b_i}^2 \int_{\bigcup_{j=1}^k D_j} \langle \Delta\varphi_i, \varphi_i\rangle\, v_g}{\sum_{i=1}^\infty {b_i}^2 \int_{\bigcup_{j=1}^k D_j} {\varphi_i}^2\, v_g} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^\infty {b_i}^2\, \nu_i}{\sum_{i=1}^\infty {b_i}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=k}^\infty {b_i}^2\, \nu_i}{\sum_{i=k}^\infty {b_i}^2} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

となる．ここで (4.11) より，

$$
\sum_{i=k+1}^{\infty} {b_i}^2\,(\nu_i - \nu_k) = 0 \qquad (4.12)
$$

を得る．ここで (4.2) のように $\nu_i \geq \nu_k$ $(k \leq\ \forall\, i)$ としていたので，(4.12) より，$\nu_i - \nu_k = 0$ $(k+1 \leq\ \forall\, i)$ を得る．すなわち，$\widetilde{\varphi} = b_k\, \varphi_k$ となり，求める結論を得る．

（第4段）ところで $\widetilde{\varphi}$ は，その作り方より，D 内の空でない開集合 D_{k+1} 上で恒等的に零である．一方，第3段より D 上で $\Delta\widetilde{\varphi} = \nu_k\, \widetilde{\varphi}$ を満たす C^∞ 関数である．これから，$\widetilde{\varphi}$ は D 上で恒等的に零とならねばならない (他方 $\widetilde{\varphi}$ の作り方より $\widetilde{\varphi} \neq 0$ であるので，このことから矛盾を生じる).

実際，$\widetilde{\varphi} \equiv 0$ となることは次のアロンジャンの定理 (N. Aronszajn, J. Math. Pures Appl., Vol 36 (1957), pp. 235-249) を用いて示される．アロンジャンの定理の証明は与えない．

定理 4.3 (アロンジャン)　L をユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, (x^1, \ldots, x^n))$ 内の領域 U 上の2階の各係数関数が C^∞ となる楕円型偏微分作用素とする．U 上の $Lf = 0$ の解 f が U 内の1点 p において，任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

に対して，

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial(x^1)^{\alpha_1}\cdots\partial(x^n)^{\alpha_n}}(p)=0 \tag{4.13}$$

を満たすとする．ここで $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ である．このとき f は U 上で恒等的に零である．

（第 5 段）定理 4.1 の証明中の第 4 段の証明はアロンジャンの定理 4.3 を使い次のように示される．$L:=\Delta-\nu_k$ とし，任意の点 $x\in D\backslash D_{k+1}$ に対して，D_{k+1} 内の一点 y を結ぶ D 内の連続曲線 γ を任意に取り，γ を M の座標開近傍 U_{α_i} $(i=1,\ldots,\ell)$ で覆い，$V_{\alpha_i}:=U_{\alpha_i}\cap D$ $(i=1,\ldots,\ell)$ とおく．$x_i\in V_{\alpha_i}\cap V_{\alpha_{i+1}}$ $(i=1,2,\ldots,\ell-1)$, $x_1=y$, $x_\ell=x$ となるようにする．

始めに，V_{α_1} について，$L\widetilde{\varphi}=0$ かつ $\widetilde{\varphi}\equiv 0$ $(V_{\alpha_1}\cap D_{k+1}$ 上$)$ であるので，定理 4.3 より，$\widetilde{\varphi}\equiv 0$ $(V_{\alpha_1}$ 上$)$ となる．次に V_{α_2} 上で $L\widetilde{\varphi}=0$ かつ $\widetilde{\varphi}\equiv 0$ $(V_{\alpha_1}\cap V_{\alpha_2}$ 上$)$ であるので，再び定理 4.3 より，$\widetilde{\varphi}\equiv 0$ $(V_{\alpha_2}$ 上$)$ となる．この操作を $\ell-1$ 回繰り返し，$\widetilde{\varphi}\equiv 0$ $(V_{\alpha_\ell}$ 上$)$ を得る．ゆえに D 上で $\widetilde{\varphi}\equiv 0$ を得る．□

命題 4.4 境界をもたない，つまり $\partial M=\emptyset$ である n 次元リーマン多様体 (M,g) のラプラス作用素 Δ と M 上の C^∞ 関数 h に対して，M 上の C^∞ 関数 f が

$$(\Delta+h)f=0 \tag{4.14}$$

を満たすとする．このとき，f の節，$f^{-1}(0)$ は M 内の $(n-1)$ 次元測度 0 の閉集合を除いて，$(n-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体となる．

この命題 4.4 の証明には，次の 3 つの補題が必要である．

補題 4.5（ベアス） n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n,(x^1,\ldots,x^n))$ における原点 $o=(0,\ldots,0)$ の近傍 V 上で定義された C^∞ 関数を係数にもつ 2 階の楕円型作用素を L とし，

$$L=\sum_{\nu=0}^{2}\sum_{i_1+\cdots+i_n=\nu} a_{i_1\cdots i_n}(x)\,\frac{\partial^\nu}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}} \tag{4.15}$$

とする．ここで微分作用素 L が楕円型であるとは，任意の $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n-\{o\}$ に対して，$\sum_{i_1+\cdots+i_n=2}a_{i_1\cdots i_n}(x)\,{\xi_1}^{i_1}\cdots{\xi_n}^{i_n}\neq 0$ となるときをいう（特にラプラス作用素 Δ は楕円型微分作用素である）．また，V 上で定義された C^∞ 関数 φ は $L\varphi=0$ の解であり，$\varphi(o)=0$ かつ φ の o での有限次の偏微分係数で 0 でないものをもつとする．このとき，φ は V 上で次のような形をしている：

$$\begin{cases}\quad\varphi(x)=p(x)+O(|x|^{N+\varepsilon})\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x)=\dfrac{\partial p}{\partial x^i}(x)+O(|x|^{N-1+\varepsilon})\quad(i=1,\ldots,n)\end{cases}\tag{4.16}$$

ここで p は N 次斉次多項式であり，$L_0\,p=0$ を満たす．また，ε は $0<\varepsilon<1$ となる正の定数であり，L_0 は次の形の 2 階の偏微分作用素である．

$$L_0:=\sum_{i_1+\cdots+i_n=2}a_{i_1\cdots i_n}(o)\,\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}.\tag{4.17}$$

この補題 4.5 は 2 階の楕円型方程式 $L\varphi=0$ の解 φ が $L_0\,p=0$ の解となる斉次多項式 p により，近似されることを示す．この補題の証明は与えない（L. Bers, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 8 (1955), pp. 473–496 を参照せよ）．

補題 4.6　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の 2 つの C^∞ 関数 f と p が次の 4 つの条件を満たすとする：

(1)　$f(x)=p(x)+O(|x|^{N+\varepsilon})$,

(2)　$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)=\frac{\partial p}{\partial x^i}(x)+O(|x|^{N-1+\varepsilon})\quad(i=1,\ldots,n)$,

(3)　$\frac{\partial^\nu p}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}(o)=0\ (0\le\nu\le N-1,\,i_1+\cdots+i_n=\nu)$,

(4)　$|\nabla p(x)|\ge C\,|x|^{N-1}$（ただし $C>0$ は定数である）．

ここで $N>1$ かつ $0<\varepsilon<1$ は定数である．このとき，$\mathbb{R}^n$ の原点 o の近傍 V から V の中への C^1 微分同相写像 Φ で，$\Phi(o)=o$ かつ $f(x)=p(\Phi(x))$ $(x\in V)$ を満たすものが存在する．

補題 4.7　p を $\mathbb{R}^n$ 上の $N(>1)$ 次の斉次調和多項式とする．このとき，p の節，$p^{-1}(0)$ は原点 $o=(0,\ldots,0)$ に特異点をもつ．

注意 $\mathbb{R}^n$ 上の $N(>1)$ 次の斉次調和多項式とは，$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial (x^i)^2} = 0$ を満たす N 次斉次多項式のことである（第7章 7.5でも詳述する）．[5] (p.162), [50] (p.253–p.266) にあるように，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 上の N 次の斉次調和多項式全体の空間を $H^N(\mathbb{R}^n)$ とすると，$d_N := \dim H^N(\mathbb{R}^n) = \frac{(N+n-3)!\,(2N+n-2)}{N!\,(n-2)!}$ である．任意の $p \in H^N(\mathbb{R}^n)$ に対し，S^{n-1} 上への制限 $p|_{S^{n-1}}$ は S^{n-1} 上の定曲率 1 の標準計量 g_0 のラプラス作用素の固有値 $N(N+n-2)$ の固有関数を与え，重複度 d_N の固有空間をなす $(N = 1, 2, \ldots)$．標準球面 (S^{n-1}, g_0) のスペクトルは固有値 $N(N+n-2)$ と，その重複度 d_N $(N = 1, 2, \ldots)$ で尽くされる．

証明 まず上の3つの補題を仮定して，命題 4.4 の証明を与える．

（第1段）f が $(\Delta + h)\,f = 0$ を満たし，$x_0 \in M$ が $f(x_0) = 0$ を満たすとする．M の点 x_0 の正規座標近傍系 $(V, (x^1, \ldots, x^n))$ を取る (1.2 節参照)．このとき，$(\Delta + h)\,f = 0$ は $\mathbb{R}^n$ の原点 o の近傍上での2階楕円型方程式 $L\,f = 0$ に移る．$(x^1, \ldots, x^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の標準座標系と見なす．$(x^1, \ldots, x^n)$ は x_0 の周りの正規座標系なので，点 x_0 において $g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = \delta_{ij}$ となり，補題 4.5 における L_0 は $L_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$ となる．$f \not\equiv 0$ としているので，アロンジャンの定理 4.3 により，f の原点 o での有限次の微係数で零でないものが存在する．したがって，f にベアスの補題 4.5 を適用することができる．補題 4.5 より，(4.16) は適当な $0 < \varepsilon < 1$ について満たす．p は N 次の斉次多項式で $L_0\,p = 0$ を満たす．すなわち，p は N 次の調和多項式である．

（第2段）$N = 1$ のとき，p は斉次1次式であり，(4.16) の下の式により，$\nabla f(o) \neq 0$ となる．したがって，原点 o の近傍において，f の節，$f^{-1}(0)$ はある C^∞ 多様体の切片となっている．

（第3段）$N > 1$ の場合．この場合，$n = \dim M$ に関する帰納法により命題 4.4 を示す．$n = 1$ の場合．アロンジャンの定理 4.3 より，f は2階の常微分方程式の $f \not\equiv 0$ となる解であることから，$f^{-1}(0)$ は離散集合となるので，正しい．$n-1$ 次元までは命題 4.4 が正しいとして，n の場合にも正しいことを示す．補題 4.6 により，原点 o の近傍での f の節，$f^{-1}(0)$ は N 次調和多項式 p の原点 o の近傍での節，$p^{-1}(0)$ と C^1 微分同相である．ところが，p の原点 o の近傍の節は p が斉次多項式であるので，

$$p^{-1}(0) = \{t\,x \in \mathbb{R}^n |\, t > 0,\, x \in S^{n-1},\, p|_{S^{n-1}}(x) - 0\} \tag{4.18}$$

と与えられる．p が調和多項式であるので，$p|_{S^{n-1}}$ は $n-1$ 次元球面上のラプラス作用素の固有関数となっている．したがって $p|_{S^{n-1}}$ に対して，帰納法の仮定を適用することができ，$\{x \in S^{n-1} |\, p|_{S^{n-1}}(x) = 0\}$ は $n-2$ 次元測度 0 の閉集合を除いて，$n-1$ 次元 C^∞ 多様体となる．(4.18) により，p の原点 o の近傍での節は $n-1$ 次元測度 0 の閉集合を除いて，$n-1$ 次元 C^∞ 多様体となる．結局，まとめると，$f(x) = p(\Phi(x))$ であり，Φ は C^1 局所微分同相写像で，$\Phi(o) = o$ を満たし，$p^{-1}(0)\backslash\Pi = M_0$ となっている．ただし Π は $n-1$ 次元測度 0 の閉集合であり，M_0 は$n-1$ 次元 C^∞ 多様体である．

（第4段）最後に，f に戻して考えると，$f^{-1}(0)\backslash\Phi^{-1}(\Pi) = \Phi^{-1}(M_0)$, かつ $\Phi^{-1}(M_0)$ は C^1 多様体であり，$\Phi^{-1}(\Pi)$ は $n-1$ 次元測度 0 の閉集合である．ゆえに $\Phi^{-1}(M_0)$ が C^∞ 多様体になることを示せば，命題 4.4 の証明が終わる．これは次のように示される．

$y \in \Phi^{-1}(M_0)$ すなわち，$f(y) = 0$ かつ $\Phi(y) \in M_0$ とする．また，$(x^1(y), \ldots, x^n(y)) = (0, \ldots, 0)$ とする．このとき，ベアスの補題 4.5 により，y の近傍上では，y に十分近い点 $x = (x^1, \ldots, x^n)$ に対して，

$$f(x) \sim p_{N'}(x)$$

となる N' 次の調和多項式 $p_{N'}$ が存在していた (補題 4.6 の条件 (1) ∼ (4) を $f(x), p_{N'}(x)$ が満たすことをこのように略記する)．$N' = 1$ のときには，第2段より，$\Phi^{-1}(M_0)$ の y の近傍の開集合が C^∞ 多様体の切片となっており，この場合は証明が終わっている．今の場合，$N' > 1$ の場合は起らないことを示す．

（第5段）さて，$\Phi^{-1}(M_0)$ の y の近傍は N' 次斉次調和多項式 $p_{N'}$ の原点での節と C^1 微分同相となっていた．しかし，補題 4.7 より，$N' > 1$ ならば，$p_{N'}^{-1}(0)$ は原点 o で特異点をもっている．C^1 微分同相写像 Φ により，この特異点は $\Phi^{-1}(M_0)$ の y の近傍上の特異点に移されるのであるから，このことは，$\Phi^{-1}(M_0)$ が C^1 微分可能多様体であったことと矛盾する．補題 4.6, 4.7 の下に命題 4.4 を得た.□

証明 補題 4.7 の証明を行う．p を $N(>1)$ 次の斉次調和多項式とする．このとき上記の補題 4.7 の下の注意から，$p|_{S^{n-1}}$ は球面 S^{n-1} 上のラプラス作用素の固有関数であり，しかも定数関数と直交しているので，必ず，S^{n-1} 上で零点をもつ．また，p は斉次多項式なので，$p^{-1}(0)=\{t\,x|\,t\geq 0,\, x\in S^{n-1}$ は $p(x)=0$ を満たす$\}$ である．よって，$p^{-1}(0)$ が C^1 多様体であるのは，$(p|_{S^{n-1}})^{-1}(0)$ が S^{n-1} の大円となる場合に限る．$N>1$ より p は N 次斉次多項式であり，$N=1$ のみが p は $\{x_1,\ldots,x_n\}$ の 1 次式で表され，$(p|_{S^{n-1}})^{-1}(0)$ は S^{n-1} の大円となる.□

証明 補題 4.6 の証明を行う．

$f(x), p(x)$ を補題 4.6 の条件 (1) ∼ (4) を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数とする．但し $N>1$ かつ $0<\varepsilon<1$ は定数とする．

（第 1 段）次のように定義される $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上の関数 F を考える．

$$F(x,a) := (1-a)\,f(x)+a\,p(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n,\, a\in\mathbb{R}). \tag{4.19}$$

このとき，F の勾配ベクトル場 ∇F は次を満たす．

$$(\nabla F)(o,a)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n},\frac{\partial F}{\partial a}\right)(o,a)=0 \quad (\forall\, a\in\mathbb{R}). \tag{4.20}$$

なぜなら，$i=1,\ldots,n$ に対して，補題 4.6 の仮定 (2), (3) より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(o) &= (1-a)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(o)+a\,\frac{\partial p}{\partial x_i}(o)\\ &= (1-a)\,\frac{\partial p}{\partial x_i}(o)+a\,\frac{\partial p}{\partial x_i}(o)\\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i}(o)\\ &= 0\end{aligned} \tag{4.21}$$

となり，また，補題 4.6 の仮定 (1) より，

$$\frac{\partial F}{\partial a}(0) = -f(o)+p(o)=0 \tag{4.22}$$

となり，(4.21), (4.22) より，(4.20) を得る．

（第2段）ここで次のような $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場 X を考える．

$$X(x,a) := \begin{cases} |\nabla F|^{-2}(x,a)\,(p(x) - f(x))\,\nabla F(x,a) & (x \neq o) \\ 0 & (x = o) \end{cases} \tag{4.23}$$

このときベクトル場 X は $\{(o,a)|\, a \in \mathbb{R}\}$ の外では C^∞ であり，$\{(o,a)|\, a \in \mathbb{R}\}$ では C^1 となる．実際，補題 4.6 の仮定 (1) より，

$$|\,(f(x) - p(x))\,(\nabla F)(x,a)| = O(|x|^{N+\varepsilon})\,|\nabla F|(x,a). \tag{4.24}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} |\nabla F|(x,a) &\geq |(1-a)\,\nabla f(x) + a\,\nabla p(x)| - |p(x) - f(x)| \\ &= |(1-a)\,\nabla(f-p)(x) + \nabla p(x)| - |p(x) - f(x)|. \end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで補題 4.6 の仮定 (2) より，

$$|(1-a)\,\nabla(f-p)(x)| = (1-a)\,O(|x|^{N-1+\varepsilon}) \tag{4.26}$$

となるので，(4.26) と，補題 4.6 の仮定 (4) より，

$$\begin{aligned} |(1-a)\,\nabla(f-p)(x) + \nabla p(x)| &= |\nabla p(x)| + O(|x|^{N-1+\varepsilon}) \\ &\geq C'\,|x|^{N-1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

また，補題 4.6 の仮定 (1) より，$|p(x) - f(x)| \leq O(|x|^{N+\varepsilon})$．このことと (4.27) を，(4.25) の右辺に代入して，$|\nabla F|(x,a) \geq C''\,|x|^{N-1}$, すなわち，

$$|\nabla F|^2 \geq C''\,|\nabla F|\,|x|^{N-1} \tag{4.28}$$

を得る．(4.28) と (4.24) と合わせて，

$$|X(x,a)| \leq O(|x|^{1+\varepsilon}) \tag{4.29}$$

を得る．これから X について求める結論を得る．

（第 3 段）そこで，

$$v(x,a) := \frac{\partial}{\partial a} - X(x,a) \tag{4.30}$$

によって定義される $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上の C^1 ベクトル場 v を考える．ベクトル場 v の点 (x_0, a_0) を通る積分曲線を $\varphi(t;\, x_0, a_0)$ と表記する．これは十分小さな $|t|$ に対して存在し，t と (x_0, a_0) に関して C^1 である．

（第 4 段）さらに，

$$\begin{aligned}
\left\langle v(t,a), \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle &= 1 - \left\langle X(x,a), \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle \\
&= 1 - |\nabla F|^{-2} \left(p(x) - f(x)\right)^2 \\
&\geq 1 - O(|x|^{2+2\,\varepsilon}) \\
&\qquad\qquad (\text{補題 4.6 の仮定 (1) と } |\nabla F| \geq C'' \, |x|^{N-1} \text{ より}) \\
&> 0 \qquad (|x| \text{ が十分小のとき}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

(4.31) より，$(x, 0)$ を通る積分曲線 $\varphi(t; x, 0)$ の a 成分は $|x|$ が十分小さいとき，t について単調増大であることを意味する．したがって，t が増大すると，$\varphi(t; x, 0)$ は集合 $\{(x,a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | \, a = 1\}$ と 1 点で交わる．この点を $(\Phi(x), 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ と定義する．こうしてできた写像 $x \mapsto \Phi(x)$ は，その定義から C^1 写像であるが，さらに $\Phi(o) = o$ かつ $f(x) = p(\Phi(x))$ を満たすことを示そう．

（第 5 段）実際，$\Phi(o) = o$ となることは，次のように示される．$\varphi(t; x, 0)$ とベクトル場 v の定義より，

$$\frac{d}{dt}\varphi(t; o, 0) = v(\varphi(t; o, 0)) = (o, 1) = \frac{d}{dt}(o, t) \tag{4.32}$$

かつ $\varphi(0; o, 0) = (o, 0)$．したがって，(4.32) と合わせて，

$$\varphi(t; o, 0) = (o, t) \tag{4.33}$$

を得る．ゆえに $\varphi(t; o, 0)$ は $\{(x,a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | \, a = 1\}$ と $t = 1$ のとき $(o, 1)$ で交わる．つまり，$\Phi(o) = o$ である．

(第6段) $f(x)=p(\Phi(x))$ を示す．$\langle \frac{\partial}{\partial a}, \nabla F\rangle = -f(x)+p(x)$ と $\langle X(x,a), \nabla F\rangle = p(x)-f(x)$ より，

$$\langle v(x,a), \nabla F\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial a} - X(x,a), \nabla F \right\rangle = 0. \tag{4.34}$$

したがって，F はベクトル場 $v(x,a)$ の積分曲線上定数となる．

$$f(x) = F(x,0) = F(\varphi(t,x,0)) \quad (\forall\ t) \tag{4.35}$$

となる．他方，ある t' について $(\Phi(x),1) = \varphi(t',x,0)$ となるので，(4.35) と F の定義より，

$$p(\Phi(x)) = F(\Phi(x),1) = F(\varphi(t',x,0)) = F(x,0) = f(x) \tag{4.36}$$

となる．補題 4.6 を得た．□

4.2 第 k 固有値の上からの評価

本節では，S.Y. チェンによるコンパクト・リーマン多様体 (M,g) のラプラス作用素 Δ_g の第k固有値 $\lambda_k(g)$ の上からの評価について述べる．

(M,g) 内の固定点 x から点 $y \in M$ の距離を $r(y) := d(x,y) = \overline{xy}$ とする．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 4.8 (**極座標表示公式**) M 上の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ が点 x からの距離 $r(y) = d(x,y)$ のみに依存するとし，$\psi = \psi(r)$ は $\mathbb{R}$ 上の r の C^∞ 関数とする．このとき

$$f(y) = \psi(r(y)) \quad (y \in M).$$

ここで $y = \mathrm{Exp}_x(r\,\theta)$, $0 \le r < r(\theta)$, $\theta \in S_x := \{X \in T_xM \,|\, g_x(X,X) = 1\}$, ${\mathrm{Exp}_x}^* v_g = \Theta(x,(r,\theta))\, r^{n-1} dr\, d\theta$ とし，Θ' は $\Theta(x,y) = \Theta(x,(r\,\theta))$ の r に関する微分を表すとすると，

$$\Delta_g f = -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \left(\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial\psi}{dr} \tag{4.37}$$

証明　x の近傍上の第 1 章 1.2 の正規座標系を $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ とし，これを極座標にしたものを，局所座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ とする．すなわち，$x^1 = r$ とし，$(x^2, \ldots, x^n)$ が S_x の開集合上の座標系となるものを取る．$(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ は点 x を除いた M 内のある開集合上の局所座標系となる（点 x を中心とする極座標系と呼ばれる）．$|g| := \det(g_{ij})$, $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ とする．このとき，x を出発する弧長パラメータをもつ任意の測地線は $S_r(x) := \mathrm{Exp}_x(r\,S_x)$ と垂直に交差するので，

$$g_{11} = 1, \quad g_{1i} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n) \tag{4.38}$$

を満たす．

他方，Δ_g は上の座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ を用いて表示すると，(4.38) より，

$$\begin{aligned}
\Delta_g f &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} \sqrt{|g|}\, \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(g^{11} \sqrt{|g|}\, \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) \\
&= -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial r} \frac{d\psi}{dr}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

となる．ここで Θ の定義より，x を中心とする極座標系 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ に関して，$\sqrt{|g|} = \Theta\, r^{n-1}$ であるので，

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial r} = \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{n-1}{r} \tag{4.40}$$

である．(4.40) を (4.39) に代入し，求める (4.37) を得る．□

さて，実数 K に対して，$M^n(K)$ を断面曲率が K の n 次元単連結定曲率空間とし，$M^n(K)$ の固定点 o を中心，半径が正数 $r_0 > 0$ のボールを $V^n(K, r_0)$ とする．

$$V^n(K, r_0) := \{x \in M^n(K) |\ \overline{ox} < r_0\} \tag{4.41}$$

とする．$K>0$ のときは，$M^n(K)$ は半径 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ の n 次元球面であり，その直径は $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ であるので，$r_0>$ としては，$r_0<\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ となるものをとっておく．

n 次元単連結定曲率空間 $M^n(K)$ 内の領域 $V^n(K,r_0)$ 上のディリクレ境界値固有値問題 (4.1) の第1固有値 ν_1 を $\nu_1(V^n(K,r_0))$ と書き，その第1固有関数を φ と書く．このとき，節領域定理 4.1 (1) より，$\nu_1(V^n(K,r_0))$ の節領域の個数は丁度 1 であるので，

$$\begin{cases} \varphi\geq 0 & (V^n(K,r_0)\ \text{上}) \\ \varphi=0 & (\partial V^n(K,r_0)\ \text{上}) \end{cases} \tag{4.42}$$

として一般性を失わない．関数 φ は次の性質を満たす．

補題 4.9　(1) $V^n(K,r_0)$ 上の第1固有関数 φ は $V^n(K,r_0)$ 上の中心 o からの距離 r のみに依存する．

(2) $V^n(K,r_0)$ 上で $\varphi>0$ である．

(3) φ を $r\in[0,r_0]$ の関数とみなしたとき，開区間 $(0,r_0)$ 上で

$$\frac{d\varphi}{dr}<0. \tag{4.43}$$

証明　(1) n 次元単連結定曲率空間 $M^n(K)$ の点 o を固定する等長変換群を K とすると，K は $V^n(K,r_0)$ の境界 $\partial V^n(K,r_0)=\{x\in M^n(K)\,|\,r(x,o)=r\}$ 上に推移的に作用している．この作用を τ_k $(k\in K)$ と書く．Δ を $M^n(K)$ 上のラプラス作用素とする．このとき，$k\in K$ に対して，

$$\Delta(\varphi\circ\tau_k)=(\Delta\varphi)\circ\tau_k=\nu_1(V^n(K,r_0))\,\varphi\circ\tau_k \tag{4.44}$$

かつ（$\partial V^n(K,r_0)$ 上で）$\varphi\circ\tau_k=0$ となるので，$\varphi\circ\tau_k$ もまた，$V^n(K,r_0)$ 上のディリクレ固有値問題の第1固有関数となる．第1固有関数の重複度は 1 だから，$\varphi\circ\tau_k=a_k\,\varphi$ (ここで a_k は $k\in K$ に連続的に依存する実数) となる．$\varphi\not\equiv 0$ なので，

$$\int_{V^n(K,r_0)}\varphi^2=\int_{V^n(K,r_0)}{\varphi\circ\tau_k}^2=(a_k)^2\int_{V^n(K,r_0)}\varphi^2$$

より，$a_k = \pm 1$. よって $a_k = 1$ $(k \in K)$ となり，$\varphi \circ \tau_k = \varphi$ $(k \in K)$ を得る．

(2) φ は Δ の $V^n(K, r_0)$ 上のディリクレ境界値問題の第1固有関数で，(1) により，r にのみ依存しているので，φ を r の関数とみて，

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{{\Theta_K}'}{\Theta_K} + \frac{n-1}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \nu_1(V^n(K, r_0))\,\varphi = 0 \tag{4.45}$$

を満たす．ここで Θ_K は n 次元単連結定曲率空間 $M^n(K)$ に対する $\mathrm{Exp}_o^* v_g = \Theta_K(o, (r, \theta))\, r^{n-1} dr\, d\theta$ であり，$\Theta_K(o, (r, \theta))$ は r のみに依存しているので，$\Theta_K(r)$ と書き，その r に関する微分を ${\Theta_K}'$ と書く．

さて，原点 o と異なる点 $x \in V^n(K, r_0)$ で，$\varphi(x) = 0$ となることは起こり得ない．もし，$\varphi(x) = 0$ になるとすれば，φ の節領域は，$\{y \in V^n(K, r_0) | \, r(x, o) < r(y, o) < r_0\}$ と $\{y \in V^n(K, r_0) | \, r(x, o) > r(y, o)\}$ の2つに分かれ，これは定理 4.1 (1) に矛盾するからである．

$\varphi(o) = 0$ となることはない．なぜなら，もし $\varphi(o) = 0$ となるとすれば，$\varphi \geq 0$ であったので，$V^n(K, r_0)$ 上の関数 φ は原点 o を臨界点にもつ r のみに依存する関数であったので，$\lim_{t \to 0+} \frac{d\varphi}{dr}(t) = 0$ となる．したがって (4.45) により，$\lim_{t \to 0+} \frac{d^2\varphi}{dr^2}(t) = 0$ となる．(4.45) の両辺を次々に r で微分して今の議論を繰り返し行うと，φ の r に関する原点 o における任意階の微係数はすべて零となる．したがって，アロンジャンの定理 4.3 により，$\varphi \equiv 0$ となり矛盾が生じるからである．

(3) n 次元単連結定曲率空間 $M^n(K)$ 上において，その Θ_K は

$$\Theta_K = \begin{cases} 1 & (K = 0) \\ \left(\dfrac{\sin \sqrt{K}\, r}{\sqrt{K}\, r}\right)^{n-1} & (K > 0) \\ \left(\dfrac{\sinh \sqrt{-K}\, r}{\sqrt{-K}\, r}\right)^{n-1} & (K < 0) \end{cases} \tag{4.46}$$

と計算される．したがって，

$$\frac{\Theta_K{}'}{\Theta_K} + \frac{n-1}{r} = \begin{cases} \dfrac{n-1}{r} & (K = 0) \\ (n-1)\sqrt{K}\,\dfrac{\cos\sqrt{K}\,r}{\sin\sqrt{K}\,r} & (K > 0) \\ (n-1)\sqrt{-K}\,\dfrac{\cosh\sqrt{-K}\,r}{\sinh\sqrt{-K}\,r} & (K < 0) \end{cases} \tag{4.47}$$

となる．これから $r \to 0+$ ならば，$\frac{\Theta_K{}'}{\Theta_K} + \frac{n-1}{r} \to \infty$ となるので，$\lim_{t\to 0+} \frac{d\varphi}{dr}(t) = 0$. したがって，(2) により (4.45) において，

$$\lim_{t\to 0+} \frac{d^2\varphi}{dr^2}(t) = -\nu_1(V^n(K, r_0))\,\varphi(o) < 0 \tag{4.48}$$

となる．以上より，$\varphi(r)$ は o において極大である．

ここで $(0, r_0)$ 上で，$\frac{d\varphi}{dr} \neq 0$ となる．なぜなら，もし $t \in (0, r_0)$ において，$\frac{d\varphi}{dr}(t) = 0$ とすると，(2) より，$\varphi > 0$ なので，(4.44) より $\frac{d^2\varphi}{dr^2}(t) < 0$ となり，φ は t で極大となる．したがって，

(i) φ は $[0, t]$ において極小値を取る

(ii) φ は $[0, t]$ において定数となる

のいずれかが起こる．しかし，(4.45) により，(i) も (ii) もどちらも起こり得ない．したがって，$(0, r_0)$ 上で $\frac{d\varphi}{dr} \neq 0$ である．ところが，$[0, r_0)$ 上において $\varphi > 0$ であり，$\varphi(r_0) = 0$ であるので，$\frac{d\varphi}{dr} \geq 0$ は起こり得ない．したがって (4.43) となる．これで補題 4.9 の証明を終えた.□

さて，(M, g) を n 次元コンパクト C^∞ リーマン多様体で，境界をもたない $\partial M = \emptyset$ とし，更に，

$$\text{リッチ曲率} \geq (n-1)\,K \quad (K \text{ は実定数}) \tag{4.49}$$

を満たすとする．このとき，S.Y. チェンによる次の定理を示したい．

定理 4.10 **(S.Y. チェン)**　(M, g) を n 次元コンパクト連結な C^∞ リーマン多様体で，境界をもたない $\partial M = \emptyset$ とし，更に，

$$\text{リッチ曲率} \geq (n-1)\,K \quad (K \text{ は実定数}) \tag{4.50}$$

を満たすとする．このとき Δ_g の零でない固有値 λ_k $(k = 2, 3, \ldots,\ (4.5))$ は次を満たす：

$$\lambda_k \leq \nu_1 \left(V^n \left(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)} \right) \right), \quad (k = 2, 3, \cdots). \tag{4.51}$$

ここで右辺の $\mathrm{diam}(M)$ は (M, g) の直径であり，ν_1 は n 次元単連結定曲率空間 $M^n(K)$ 内の (4.41) による領域 $V^n(K, r_0)$ 上のディリクレ固有値問題 (4.1) の第 1 固有値を表し，$r_0 := \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)}$ としたものである．

注意 4.11　$K > 0$ のとき，定理 3.15 により，(M, g) 内の任意の固定点 $x_0 \in M$ を出発する測地線 $\mathrm{Exp}_{x_0}(r\,\theta)$ に沿った第一共役点が，x_0 からの距離が $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ 以下の点に現れることがわかるので，$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ となる．したがって，$V^n(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)})$ $(k = 2, 3, \ldots)$ について，$\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}\,2(k-1)} < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ となり，$V^n(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)})$ は $M^n(K)$ 内の開領域となるので，(4.51) の右辺は意味をもつ．

定理 4.10 の証明の前にいくつか準備を行う．定理 4.10 の仮定のように，(M, g) を n 次元コンパクト C^∞ リーマン多様体で，境界をもたない $\partial M = \emptyset$ とし，そのリッチ曲率が $(n-1)\,K$ 以上，すなわち (4.50) を満たすとする．このとき，$x_0 \in M$ を任意の固定点とし，$\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))$ $(\theta \in S_{x_0})$ を (3.67) におけるように，${\mathrm{Exp}_{x_0}}^* v_g = \Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}\,dr\,d\theta$ とする．このとき，(3.110) のように，

$$\frac{\Theta'(x_0,\,(r,\,\theta))}{\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))} \leq \frac{{\Theta_K}'(r)}{\Theta_K(r)} \tag{4.52}$$

となる．ここで，(4.47) のように，

$$\frac{{\Theta_K}'(r)}{\Theta_K(r)} = \begin{cases} \dfrac{n-1}{r} & (K = 0) \\[2ex] (n-1)\sqrt{K}\,\dfrac{\cos\sqrt{K}\,r}{\sin\sqrt{K}\,r} & (K > 0) \\[2ex] (n-1)\sqrt{-K}\,\dfrac{\cosh\sqrt{-K}\,r}{\sinh\sqrt{-K}\,r} & (K < 0) \end{cases} \tag{4.53}$$

であった．さらに，補題 3.10 における $0 < r(\theta) < \infty$ $(\theta \in S_{x_0})$ は $K > 0$ の

とき，$r(\theta) \leq M^n(K)$ の直径 $= \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ となっている．

さて，補題 4.9 における $M^n(K)$ 内の領域 $V^n(K, r_0)$ 上のディリクレ固有値問題の第1固有関数 φ に対して，M 上の関数 $\widetilde{\varphi}$ を次のように定義する．これを**移植手術**と呼ぼう：

$$\widetilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(r(x_0, x)) & (r(x_0, x) \leq r_0 \text{ のとき}) \\ 0 & (r(x_0, x) > r_0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.54}$$

ただし，$r(x_0, x)$ は2点 x_0, x の距離を表し，$K > 0$ のときは，$0 < r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ とする．補題 4.9 (3) により，φ は $[0, r_0]$ 上の関数とみなしている．このとき，$\widetilde{\varphi}$ は M 上ほとんど至る所で微分可能であり，さらに，$\int_M \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle \, v_g < \infty$ を満たすが，更に次の補題が成り立つ．

補題 4.12　移植手術をしてできた関数 $\widetilde{\varphi}$ は次の不等式を満たす：

$$\int_M \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle \, v_g \leq \nu_1(V^n(K, r_0)) \int_M \widetilde{\varphi}^2 \, v_g. \tag{4.55}$$

証明　各 $\theta \in S_{x_0}$ に対して，$a(\theta) := \min\{r_0, r(\theta)\}$ とおく．このとき (3.95)，及び補題 4.9 (3) と $\widetilde{\varphi}$ の定義より，次が成り立つ：

$$\int_M \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle \, v_g = \int_{\theta \in S_{x_0}} \left[\int_0^{a(\theta)} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1} \, dr \right] d\theta, \tag{4.56}$$

$$\int_M \widetilde{\varphi}^2 \, v_g = \int_{\theta \in S_{x_0}} \left[\int_0^{a(\theta)} \varphi^2 \, \Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1} \, dr \right] d\theta. \tag{4.57}$$

ここで，(4.56) の右辺の積分の [　] の中身は，部分積分法より，

$$\begin{aligned} &\int_0^{a(\theta)} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1} \, dr \\ &\qquad = \left[\varphi \frac{d\varphi}{dr} \Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1} \right]_{r=0}^{r=a(\theta)} \\ &\qquad\qquad - \int_0^{a(\theta)} \frac{\varphi}{\Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \Theta(x_0, (r, \theta)) \, r^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\times\ \Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}\,dr. \tag{4.58}$$

ここで (4.58) の右辺の第 2 項の積分の中身に関して，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}\,\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}\right)\\
&\qquad = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\frac{d}{dr}\,\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))}{\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))}\right)\frac{d\varphi}{dr}\\
&\qquad \geq \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{{\Theta_K}'}{\Theta_K}\right)\frac{d\varphi}{dr}\\
&\qquad = -\nu_1(V^n(K,r_0))\,\varphi.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

ここで，(4.59) の不等式には，(4.52) と補題 4.9 (3) を使い，最後の等号には (4.45) を使った．以上より，(4.58) の右辺は $\frac{d\varphi}{dr}(0)=0$ と (4.59) より，

$$\begin{aligned}
(4.58)\ \text{の右辺} &\leq \varphi(a(\theta))\,\frac{d\varphi}{dr}(a(\theta))\,\Theta(x_0,\,(a(\theta),\,\theta)\,a(\theta)^{n-1}\\
&\qquad + \nu_1(V^n(K,r_0))\int_0^{a(\theta)}\varphi^2\,\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}\,dr\\
&\leq \nu_1(V^n(K,r_0))\int_0^{a(\theta)}\varphi^2\,\Theta(x_0,\,(r,\,\theta))\,r^{n-1}\,dr.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

最後の不等式は補題 4.9 (3) より，($(0,r_0)$ 上）$\frac{d\varphi}{dr}<0$ となっているからである．そこで，最後に，$\theta\in S_{x_0}$ 上で積分すれば，(4.57) と合わせて，求める不等式 (4.55) を得る.□

証明 定理 4.10 の証明を行う．まず，(M,g) のラプラス作用素 Δ_g の固有値を重複度を込めて，(4.5) のように書き，$u_i\in C^\infty(M)$ $(i=1,2,\ldots)$ を，

$$\Delta_g\,u_i=\lambda_i\,u_i\quad(i=1,2,\ldots),$$

$$(u_i,u_j)=\int_M u_i\,u_j\,v_g=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\ldots)$$

を満たすものとする．また，M 内の点 $x\in M$ を中心，半径 $r>0$ のボールを $B_x(r):=\{y\in M|\,\overline{xy}<r\}$ と書き，M の 2 点 x, y の間の距離を $d(x,y)$ と書くこととする．

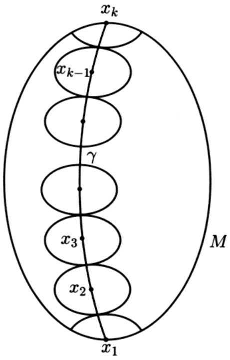


図 4.1　$x_1, \ldots, x_k$ と γ

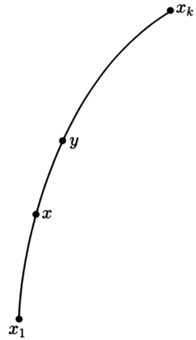


図 4.2　x_1, x, y, x_k と γ

（第1段）M 内の k 個の点 $x_1, \ldots, x_k$ を選び,

$$B_{x_i}\left(\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)}\right) \cap B_{x_j}\left(\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)}\right) = \emptyset \qquad (i \neq j) \tag{4.61}$$

が成り立つようにできる．diam(M) は (M, g) の直径である．実際，$x_1, x_k \in M$ を $d(x_1, x_k) = \mathrm{diam}(M)$ となる2点とする．それら x_1 と x_k を結ぶ測地線で，その長さが diam(M) を実現するものを γ とする，$L(\gamma) = \mathrm{diam}(M)$. γ を $k-1$ 等分し，その分点を x_1 から近い方から順に，$x_2, \ldots, x_{k-1}$ とすると，これが求めるものであることを以下で示そう．

（第2段）γ 上の2点 $x, y \in \gamma$ $(x \neq y)$ に対して，$L(x, y)$ を x と y の間の γ の長さとし，x_1 に近い方を x, x_k に近い方を y としておく．

このとき $L(x, y) = d(x, y)$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(M) = L(\gamma) &= L(x_1, x) + L(x, y) + L(y, x_k) \\ &\geq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, x_k) \geq d(x_1, x_k) = \mathrm{diam}(M).\end{aligned}$$

ここで，$L(x_1, x) \geq d(x_1, x)$, $L(x, y) \geq d(x, y)$, かつ $L(y, x_{k+1}) \geq d(y, x_{k+1})$ であるので，これらの不等号はすべて等号とならねばならないからである．

（第3段）さて，(4.61) を示そう．今，(4.61) が成立しないとすれば，(4.61) の左辺に属する点が存在するので，それを y とする．このとき，

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, y) + d(y, x_j) < \frac{\mathrm{diam}(M)}{k-1} \tag{4.62}$$

となる．一方，$\{x_i\}_{i=1}^k$ は測地線 γ の長さを $k-1$ 等分した γ 上の分点であったことと，第2段とを合わせて，

$$d(x_i, x_j) = L(x_i, x_j) \geq \frac{\mathrm{diam}(M)}{k-1} \tag{4.63}$$

となる．(4.62) と (4.63) は矛盾である．

（第4段）以上の準備のもと，関数 φ を補題 4.9 における $V^n(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)})$ に対する第1固有関数とし，(M, g) 内の各 x_i 中心，半径 $\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)}$ のボール $B_{x_i}(\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)})$ 上に移植手術を (4.54) のように行い，それによってできた M 上の関数を $\widetilde{\varphi}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とおく．このとき，どれかは零でない実数 $\{a_1, \ldots, a_k\}$ を選び，

$$\int_M u_i \left(\sum_{j=1}^k a_j \, \widetilde{\varphi}_j \right) v_g = 0 \quad (\forall\, i = 1, \ldots, k-1) \tag{4.64}$$

となるようにできる．実際，$\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=1}^k$ はその作り方より，$\int_M \widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{\varphi}_j \, v_g = 0$ $(i \neq j)$ だから，$L^2(M)$ 内の k 次元部分空間 L を生成している．ここで線形写像として，

$$P : L \ni \varphi \mapsto \sum_{i=1}^{k-1} (\varphi, u_i)\, u_i \in L(u_1, \ldots, u_{k-1}) \tag{4.65}$$

を考えると，$\dim(\mathrm{Ker}(P)) \geq \dim(L) - \dim L(u_1, \ldots, u_{k-1}) = 1$ であり，

$$\varphi \in \mathrm{Ker}(P) \iff \int_M u_i \, \varphi \, v_g = (\varphi, u_i) = 0 \quad (\forall\, i = 1, \ldots, k-1) \tag{4.66}$$

となるからである．

（第5段）関数 $f := \sum_{j=1}^{k} a_j\, \widetilde{\varphi}_j$ はその作り方より，恒等的には零でなく，M 上のほとんど至る所で可微分であり，$(f, u_i) = 0$ $(\forall\, i = 1, \ldots, k-1)$ である．したがって，最大・最小原理の命題 2.13 の注意 2.14 より，固有値 λ_k について次の評価を得る：

$$\begin{aligned}
\lambda_k \int_M f^2\, v_g &\leq \int_M \langle \nabla f, \nabla f \rangle\, v_g \\
&= \sum_{j=1}^{k} {a_j}^2 \int_M \langle \nabla \widetilde{\varphi}_j, \nabla \widetilde{\varphi}_j \rangle\, v_g \\
&\qquad\qquad (\mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}_i) \cap \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}_j) = \emptyset\ (i \neq j)\ \text{より}) \\
&\leq \nu_1 \left(V^n \left(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)} \right) \right) \sum_{j=1}^{k} {a_j}^2 \int_M {\widetilde{\varphi}_j}^2\, v_g \quad (\text{補題 4.12 より}) \\
&= \nu_1 \left(V^n \left(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)} \right) \right) \int_M f^2\, v_g
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$f \not\equiv 0$ より，$\int_M f^2\, v_g > 0$ なので，

$$\lambda_k \leq \nu_1 \left(V^n \left(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)} \right) \right) \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{4.68}$$

これで定理 4.10 を得た.□

次に，$\nu_1(V^n(K, r))$ を調べる．次の評価が知られている．証明は省略する．例えば [16], p.294 及び [55] を見よ．

補題 4.13　$K \leq 0$ のとき，$\nu_1\left(V^n\left(K, r\right)\right)$ は次のように評価される．

(1) $K = 0$ のとき，

$$\nu_1(V^n(0, r)) = \left(j_{\frac{n}{2}-1} \right)^2 r^{-2} < n \left(\frac{n}{2} + 2 \right) r^{-2} \tag{4.69}$$

ここで，$j_{\frac{n}{2}-1}$ は第 $(\frac{n}{2} - 1)$ 次のベッセル関数の正の第1零点を表し，$(j_{\frac{n}{2}-1})^2 < n(\frac{n}{2} + 2)$ である．

(2) $K=-H<0$ $(H>0)$ のとき．このとき，

(2-1) n が偶数で，$n=2(m+1)$ $(m=0,1,2,\ldots)$ のとき，

$$\nu_1(V^n(-H,r)) \le \frac{(2m+1)^2}{4}H + \frac{(1+2^m)^2\,\pi^2}{r^2}. \tag{4.70}$$

(2-2) n が奇数で，$n=2m+3$ $(m=0,1,2,\ldots)$ のとき，

$$\nu_1(V^n(-H,r)) \le \frac{(2m+2)^2}{4}H + \frac{(1+2^{2m})^2\,(1+\pi^2)}{r^2}. \tag{4.71}$$

注意 4.14　$K>0$ のとき，$\nu_1(V^n(K,r))$ の良い評価は知られていないようである（[38] も見よ）．

定理 4.10 と補題 4.13 において $r=\frac{\mathrm{diam}(M)}{2(k-1)}$ として，次の系 4.15 を得る．

系 4.15　(M,g) を n 次元コンパクト連結な C^∞ リーマン多様体で，境界なし，$\partial M=\emptyset$ とする．

(1) (M,g) が リッチ曲率 ≥ 0 を満たすならば，

$$\lambda_k \le \frac{4(k-1)^2\,n(n+4)}{(\mathrm{diam}(M))^2}. \tag{4.72}$$

(2) (M,g) が リッチ曲率 $\ge (n-1)(-H)$ $(H>0)$ を満たすなら，

(2-1) n が偶数で，$n=2(m+1)$ $(m=0,1,2,\ldots)$ のとき，

$$\lambda_k \le \frac{(2m+1)^2}{4}H + \frac{4\,(k-1)^2\,(1+2^m)^2\,\pi^2}{(\mathrm{diam}(M))^2}. \tag{4.73}$$

(2-2) n が奇数で，$n=2m+3$ $(m=0,1,2,\ldots)$ のとき，

$$\lambda_k \le \frac{(2m+2)^2}{4}H + \frac{4\,(k-1)^2\,(1+2^{2m})^2\,(1+\pi^2)}{(\mathrm{diam}(M))^2}. \tag{4.74}$$

ただし $\mathrm{diam}(M)$ は (M,g) の直径である．

定理 4.16 (**リッチ曲率版のトポノゴフの球面定理**) (M, g) を n 次元コンパクト連結な C^∞ リーマン多様体で，境界はなく，$\partial M = \emptyset$ とし，

「リッチ曲率 $\geq (n-1)\,K > 0$」

とする．$\mathrm{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ ならば，(M, g) は断面曲率 K の球面に等長的である．

注意 4.17 定理 4.16 において，「断面曲率 $\geq\ K\ >\ 0$」と仮定を強めたものが，いわゆる，トポノゴフの球面定理である．この仮定から，定義より，上述の仮定「リッチ曲率 $\geq (n-1)\,K > 0$」が導かれることに注意する．

証明 定理 4.16 の証明を行う．「リッチ曲率 $\geq (n-1)\,K > 0$」の仮定は ρ を (M, g) のリッチ・テンソルとするとき，

$$\rho_x(v, v) \geq (n-1)\,K\,g(v, v) \quad (\forall\, v \in T_xM,\ x \in M)$$

と同等であり，このとき，次節で証明する (M, g) のラプラス作用素 Δ_g の最小正固有値 λ_2 に関するリヒネロヴィッツ・小畠の定理 4.18 より，

$$\lambda_2 \geq n\,K \tag{4.75}$$

が成り立つ．定理 4.10 を今の場合の $k = 2$ に適用すると，

$$\lambda_2 \leq \nu_1\left(V^n\left(K, \frac{\mathrm{diam}(M)}{2}\right)\right) = \nu_1\left(V^n\left(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right)\right) \tag{4.76}$$

となる．ここで後で示すように，

$$\nu_1\left(V^n\left(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}\right)\right) \leq n\,K \tag{4.77}$$

であるので，(4.75), (4.76), (4.77) を合わせて，$\lambda_2 = n\,K$ を得る．これはリヒネロヴィッツ・小畠の定理 4.18 の等号成立の場合にあたる．したがって，(M, g) は断面曲率が K の球面と等長的となる．

(4.77) は次のように示される．断面曲率 K の n 次元単連結空間 $M^n(K)$ は次のように与えられる．(S^n, g_0) を標準的単位球面，すなわち，

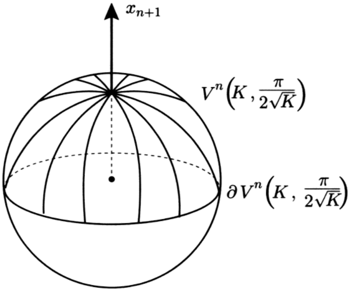


図 4.3　上半球面 $V^n(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}})$

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2 = 1 \right\}$$

とし，g_0 を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準ユークリッド計量から S^n 上に誘導される断面曲率 1 の標準計量とするとき，$(M^n(K), g_K) = (S^n, \frac{1}{K}\, g_0)$ であり，$M^n(K)$ は半径 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ の球面と同一視される．そのラプラス作用素 Δ_K は $\Delta_K = K\,\Delta_{g_0}$ となる．ただし，Δ_{g_0} は (S^n, g_0) のラプラス作用素であり，その最小正固有値は n, 重複度は $n+1$, その固有関数 u_i は $u_i = x_{i-1}|_{S^n}$ $(i = 2, \ldots, n+2)$ により与えられている．

$V^n(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}})$ は $M^n(K)$ の上半球面であり，$\partial V^n(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}})$ は $M^n(K)$ の赤道である．ここで $M^n(K)$ の北極から赤道までの円弧の長さが $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ であることに注意する．したがって,

$$\begin{cases} \Delta_K\, x_{n+1} = K\,(\Delta_{g_0}\, x_{n+1}) = (n\,K)\, x_{n+1} \\ x_{n+1} = 0 \qquad\qquad (\partial V^n(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}}) \text{ 上で}) \end{cases} \tag{4.78}$$

ゆえに $V^n(K, \frac{\pi}{2\sqrt{K}})$ 上のディリクレ固有値問題の第 1 固有値は $n\,K$ 以下となるので，(4.77) を得た．□

4.3 リヒネロヴィッツ・小畠の定理

本節では，次のリヒネロヴィッツ・小畠の定理について述べる．この定理は「リッチ曲率の下限がラプラス作用素の最小正固有値 λ_2 の下限に影響を与える」という重要な結果をもたらす．リヒネロヴィッツのこの定理への貢献は最小正固有値 λ_2 の評価であり，小畠守生の貢献はその評価式がベストであって等号成立の場合に，そのリーマン多様体が標準単位球面と等長的になることを示したことである．両方の結果とも極めて重要である．

定理 4.18 **(リヒネロヴィッツ・小畠の定理)** (M, g) は n 次元コンパクト連結な C^∞ リーマン多様体で，境界なし $(\partial M = \emptyset)$ とし，そのリッチ・テンソル場 ρ が

$$\rho \geq k\,g, \quad (\rho_x(v, v) \geq k\,g_x(v, v) \quad (\forall\ v \in T_xM,\ x \in M)) \tag{4.79}$$

を満たすとする．ここで $k > 0$ は定数とする．このとき，

$$\lambda_2 \geq \frac{n}{n-1}\,k \tag{4.80}$$

が成り立つ．(4.80) において，等号成立となるのは (M, g) が n 次元標準単位球面 (S^n, g_0) に等長的である場合に限る．

注意 4.19 定理 4.18 と定理 4.16 とでは $(n-1)$ 倍のずれがあることに注意する．

証明 定理 4.18 の証明を行う．

（第1段）初めに，1次微分形式に作用するラプラシアンを思い起こそう（1.6節）．M 上の C^∞ 1次微分形式の空間 $A^1(M)$ 上のラプラスシアン Δ_1 は次のように定義される楕円型線形作用素であった：

$$\Delta_1\omega := (d_0\,\delta_1 + \delta_2\,d_1)\omega \quad (\omega \in A^1(M))$$

ここで，$\delta_1 : A^1(M) \to C^\infty(M)$ および $\delta_2 : A^2(M) \to A^1(M)$ はそれぞれ外微分 $d_0 : C^\infty(M) \to A^1(M)$ と $d_1 : A^1(M) \to A^2(M)$ の余微分である．以下では，下付き添字は省略する．

このとき，次の等式が成立する：

$$\Delta_1\omega = \overline{\Delta}\omega + \omega \circ \rho. \tag{4.81}$$

この等式を 1 次微分形式に対する**ワイツェンベック公式**という．この証明は例えば [52], p.193 を見られると良い．ここで $\overline{\Delta}$ は**疎ラプラス作用素**と呼ばれる楕円型線形作用素で，

$$\overline{\Delta}\omega := -\sum_{i=1}^{n}\{\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\omega) - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\omega\} \quad (\omega \in A^1(M)) \tag{4.82}$$

である．ただし，∇ は (M,g) のレビ･チビタ接続とそれから誘導される $A^1(M)$ 上の接続である：$(\nabla_X\omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(M), \omega \in A^1(M))$．また，$\{e_i\}$ $(i = 1,\ldots,n)$ は (M,g) 上の正規局所枠である．また，(4.81) の右辺の第 2 項の $\omega \circ \rho$：$\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は次のように定義される線形作用素である．

$$(\omega \circ \rho)(X) := \omega(\rho(X)) = \rho(Z, X) \quad (X \in \mathfrak{X}(M)). \tag{4.83}$$

ここで (4.83) の右辺における $Z \in \mathfrak{X}(M)$ は $\omega(Y) = g(Z, Y)$ $(\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M))$ によって 1 次微分形式 ω から一意的に定まる M 上の C^∞ ベクトル場を表す．

特に，$\omega = df$ $(f \in C^\infty(M))$ に対してワイツェンベック公式 (4.81) を適用し，それと自分自身 df との L^2 内積を取ると，次式を得る：

$$\begin{aligned}\int_M \langle df, \Delta_1(df)\rangle\, v_g &= \int_M \langle df, \overline{\Delta}(df)\rangle\, v_g + \int_M \rho(\nabla f, \nabla f)\, v_g \\ &= \int_M \langle \nabla(df), \nabla(df)\rangle\, v_g + \int_M \rho(\nabla f, \nabla f)\, v_g. \end{aligned} \tag{4.84}$$

（第 2 段）ここで (4.84) の左辺は $\Delta_1\,(df) = (d\,\delta + \delta\,d)\,df = d\,(\Delta_g f)$ であるので，

$$(4.84)\ \text{の左辺} = \int_M \langle df, d\,(\Delta_g f)\, v_g = \int_M (\Delta_g f)^2\, v_g. \tag{4.85}$$

ここで $f \in C^\infty(M)$ として Δ_g の固有値 $\lambda > 0$ の固有関数を取れば，(4.85) の右辺は

$$\int_M (\Delta_g f)^2 \, v_g = \lambda \int_M f \, \Delta_g f \, v_g = \lambda \int_M \langle df, df \rangle \, v_g = \lambda \int_M g(\nabla f, \nabla f) \, v_g. \tag{4.86}$$

（第3段）さて，$\rho \geq k\,g$ と仮定する．このとき，

$$\int_M \rho(\nabla f, \nabla f) \, v_g \geq k \int_M g(\nabla f, \nabla f) \, v_g. \tag{4.87}$$

以上 (4.84) $\sim$ (4.87) をまとめて，次の不等式を得る：

$$0 \geq \int_M \langle \nabla(df), \nabla(df) \rangle \, v_g + \left(-1 + \frac{k}{\lambda}\right) \int_M (\Delta_g f)^2 \, v_g. \tag{4.88}$$

(4.88) を $\|\cdot\|$ の記号を用いて簡潔に，次のように書いておこう．

$$0 \geq \|\nabla(df)\|^2 + \left(-1 + \frac{k}{\lambda}\right) \|\Delta_g f\|^2. \tag{4.89}$$

（第4段）さて，ここで，$C^\infty(M)$ 関数 f のヘッシアンを

$$\begin{aligned} h(X, Y) &:= (\nabla(df))(X, Y) = \nabla_X(df)(Y) \\ &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)) \end{aligned} \tag{4.90}$$

と定義すると，

$$h(X, Y) = h(Y, X) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

である．なぜなら，

$$\begin{aligned} h(X, Y) - h(Y, X) &= X(Yf) - Y(Xf) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f \\ &= X(Yf) - Y(Xf) - [X, Y]f \\ &= 0. \end{aligned}$$

このとき，

$$\Delta_g f = -\mathrm{Trace}_g h = -\sum_{i=1}^n h_{ii} \tag{4.91}$$

である．ここで任意の M 上の C^∞ 対称 2 テンソル場 $h \in S^2(M)$ に対して，$h_{ij} := h(e_i, e_j)$ とおく．ここで $\{e_i\}_{i=1}^n$ は (M, g) 上の局所正規直交枠である．

（第 5 段）さらに，h の (M, g) 上の各点において $|h|^2 := \sum_{i,j=1}^n {h_{ij}}^2$ とし，$\|h\|^2 := \int_M |h|^2 \, v_g$ とおく．このとき，

$$|h|^2 \geq \frac{1}{n} \left(\mathrm{Trace}_g h\right)^2 \tag{4.92}$$

であり，等号成立は $h = \alpha \, g$ $(\alpha \in C^\infty(M))$ の場合に限る．実際，各点 $x \in M$ において，コーシー・シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned} |h|^2 \, n = \left(\sum_{i,j=1}^n {h_{ij}}^2\right) \left(\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\right) &\geq \left(\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \, \delta_{ij}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}\right)^2 = \left(\mathrm{Trace}_g h\right)^2 \end{aligned} \tag{4.93}$$

が成り立ち，等号成立は $h_{ij} = \alpha \, \delta_{ij} = \alpha \, g(e_i, e_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ である．すなわち，M 上において $h = \alpha \, g$ となっている．

（第 6 段）第 5 段の不等式 (4.92) を，第 4 段における対称 2 テンソル $h := \nabla(df)$ に適用すれば，不等式

$$|\nabla(df)|^2 \geq \frac{1}{n} \left(\Delta_g f\right)^2 \tag{4.94}$$

が得られ，かつ等号成立は $\nabla(df) = \alpha \, g$ $(\alpha \in C^\infty(M))$ となる場合に限る．したがって，(4.94) を M 上で積分して，

$$\|\nabla(df)\|^2 \geq \frac{1}{n} \|\Delta_g f\|^2 \tag{4.95}$$

を得た．

（第 7 段）(4.89) と (4.95) と合わせて，次の不等式を得た．

$$0 \geq \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{k}{\lambda}\right) \|\Delta_g f\|^2. \tag{4.96}$$

ここで f は Δ_g の固有値 λ の固有関数であったので，$\|\Delta_g f\|^2 > 0$ であるから，(4.96) より，$0 \geq \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{k}{\lambda}\right)$, すなわち，次を得た.

$$\lambda \geq \frac{n}{n-1}\,k. \tag{4.97}$$

（第8段）さらに，(4.97) において等号成立 $\lambda = \frac{n}{n-1}\,k$ とする．これを (4.89) に代入して，

$$\begin{aligned} 0 &\geq \|\nabla(df)\|^2 + \left(-1 + \frac{k}{\lambda}\right)\|\Delta_g f\|^2 \\ &= \|\nabla(df)\|^2 + \left(-1 + \frac{n-1}{n}\right)\|\Delta_g f\|^2 \\ &= \|\nabla(df)\|^2 - \frac{1}{n}\|\Delta_g f\|^2. \end{aligned} \tag{4.98}$$

(4.98) と合わせて，(4.95) は等号成立となり，(4.94) の下で (4.95) が等号成立ならば，M 上の各点において (4.94) は等号成立でなければならない．したがって，

$$\nabla(df) = \alpha\, g \quad (\alpha \in C^\infty(M)) \tag{4.99}$$

となる．ここで (4.99) の両辺の Trace を取る.

$$\mathrm{Trace}_g(\nabla(df)) = -\Delta_g f = -\lambda\, f = -\frac{n}{n-1} k\, f \tag{4.100}$$

$$\mathrm{Trace}_g(\alpha\, g) = n\,\alpha \tag{4.101}$$

したがって，$\alpha = -\frac{k}{n-1}\, f$ となる．これを (4.99) に代入して，次を得る.

$$\nabla(df) = -\frac{k}{n-1}\, f\, g. \tag{4.102}$$

（第9段）結局，定理 4.18 の証明は次の定理 4.20（小畠の定理）を示すことに帰着された.　　□

定理 4.20 (小畠の定理) (M,g) を n 次元コンパクト連結な C^∞ リーマン多様体で，境界なし $(\partial M=\emptyset)$ とする．定数でない $f\in C^\infty(M)$ が正定数 $K>0$ について，

$$\nabla(df)+K\,f\,g=0 \tag{4.103}$$

の解であるとする．このとき，(M,g) は $(S^n,\frac{1}{K}\,g)$ に等長的である．ここで $(S^n,\frac{1}{K}\,g)$ は $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の半径 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ の球面 $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ 上に $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準ユークリッド計量から誘導されたリーマン計量をもった多様体（断面曲率 K の多様体）と等長的である．

証明 小畠の定理（定理 4.20）の証明を行う．

（第 1 段）(4.103) を弧長 t でパラメータ化された測地線 $\gamma(t)$ 上で考える．$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$ かつ $g(\dot\gamma,\dot\gamma)=1$ より，

$$\begin{aligned}0&=(\nabla(df))(\dot\gamma,\dot\gamma)+K\,f\,g(\dot\gamma,\dot\gamma)\\&=\dot\gamma(df(\dot\gamma))-df(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)+K\,f\,g(\dot\gamma,\dot\gamma)\\&=\frac{d^2(f\circ\gamma)}{dt^2}+K\,(f\circ\gamma)(t).\end{aligned} \tag{4.104}$$

(4.104) より，

$$(f\circ\gamma)(t)=A\,\cos(\sqrt{K}\,t)+B\,\sin(\sqrt{K}\,t) \tag{4.105}$$

ここで定数 A と B は

$$A=f(\gamma(0)), \tag{4.106}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{K}}\left.\frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{K}}\,\dot\gamma(0)f \tag{4.107}$$

により与えられる．

（第 2 段）M はコンパクトなので，C^∞ 関数 f は M で最大値を取る．この点を $P_+\in M$ とする．微分方程式 (4.103) は f について線形なので，$f(P_+)=1$

として一般性を失わない．f はまた最小値を取る．この点を P_- とする．このとき，$f(P_-)=-1$ である．

実際，2点 P_+ と P_- とを弧長 t でパラメータ化された測地線 γ で結ぶ ($\gamma(0)=P_+$ とする)．このとき，(4.106) より $1=f(\gamma(0))=A$．P_+ で最大値を取るので，(4.107) より $B=0$．よって，(4.105) より，

$$f(\gamma(t))=\cos\left(\sqrt{K}\,t\right) \tag{4.108}$$

となる．したがって，$f(P_-)=-1$ でなければならない．

（第3段）P_+ と P_- の近傍に f の臨界点は存在しない．なぜなら，

$$(\nabla(df))(\dot{\gamma},\dot{\gamma})=-K\,f\,g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})$$

より，P_+ と P_- はともに非退化な臨界点となるからである．

また，P_+ から出発する任意の P_+ からの弧長 t によってパラメータ化された測地線 $\gamma(t)$ は

$$f\circ\gamma(t)=\cos\left(\sqrt{K}\,t\right) \tag{4.109}$$

を満たしていた．そこで，$t\geq 0$ に対し，次の M 内の部分集合 M_t を考える：

$$M_t:=\{P\in M|\,P_+ \text{ を出発する } P_+ \text{ からの弧長によりパラメータ化された測地線上の点で，} P_+ \text{ からの距離が } t \text{ であるもの}\} \tag{4.110}$$

M_t は M 内の閉集合である．

（第4段）次の3つの補題が成り立つ．

補題 4.21　$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}=\{P_-\}$ かつ $\{P\in M|\,f(P)=-1\}=\{P_-\}$．

証明　補題 4.21 の証明をする．$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}$ は (4.110) において，$t=\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ とおいたものであり，(4.109) より，その上で $f=-1$ (f の最小値) を取る．$\nabla(df)=-K\,f\,g$ より，$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}$ の各点は f の非退化な臨界点であるので，$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}$ は M 内の離散集合となる．他方，(4.110) の定義より，

$$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}=\mathrm{Exp}_{P_+}\left(\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}}\,\theta\,\middle|\,\theta\in S_{P_+}\subset T_{P_+}M\right\}\right)$$

であるので，$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}$ は連結集合である．したがって，$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}$ は 1 点よりなり，$M_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}} = \{P_-\}$ である．また，このことは，P_+ を出発するすべての測地線が P_- で交わることを意味する．P_+ からの距離が $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ を超える点は存在せず，$\{P \in M |\, f(P) = -1\} = \{P_-\}$ となる.□

補題 4.22 $\{P |\, f(P) = 1\} = \{P_+\}$ である.

証明 これは補題 4.21 と (4.109) よりいえる.□

補題 4.23 P_+ から出発する 2 つの異なる測地線は P_- で交わり，P_+ と P_- 以外では交わらない.

証明 補題 4.23 の証明をする．P_- で交わることは補題 4.21 の証明中より明らか．M 内の任意の点 $P \in M$ について，P と P_+ とを弧長 t でパラメータ化した測地線 γ で結び，$\gamma(t_0) = P$ とする．このとき，(4.109) により，f の勾配ベクトルは

$$(\nabla f)(P) = -\sqrt{K}\,\sin\left(\sqrt{K}\,t_0\right)\dot{\gamma}(t_0) \tag{4.111}$$

となる．実際 (4.109) より，関数 f は $f(x) = \cos\left(\sqrt{K}\,r\right)\ r(x) = d(P_+, x)$ となっている．したがって，(4.111) は点 P における測地線 γ の方向が f により一意的に定まることを意味するので，P において二通りの方向を取ることはない.□

（第 5 段）補題 4.21, 4.23 より，指数写像 Exp_{P_+} は $\{r\,\theta |\, \theta \in S_{P_+},\ 0 \le r < \frac{\pi}{\sqrt{K}}\} \subset T_{P_+}M$ から $M \backslash \{P_-\}$ への 1 対 1 写像であるが，微分同相となる．というのは Exp_{P_+} が $v \in T_{P_+}M$ $(0 < |v| < \frac{\pi}{\sqrt{K}})$ を特異点にもつとすれば，P_+ と $\mathrm{Exp}_{P_+}(v)$ とを結ぶ測地線が 2 本引けることになるが，補題 4.23 よりこのようなことは起こらないからである.

（第 6 段）さて，$S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点 o 中心，半径 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ の球面とし，$S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ 内の任意の点 $\overline{P}_+$ を取り，$\overline{P}_+$ の $S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ での対蹠点 ($\overline{P}_+$ と o を結ぶ直線と $S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ との $\overline{P}_+$ と異なるもう一つの交点) を $\overline{P}_-$ とする.

等長同型写像 $\varphi\colon T_{P_+}M \to T_{\overline{P}_+}S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ を一つ選んでおき，

$$B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) := \left\{ v \in T_{P_+}M \,\middle|\, |v| < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right\},$$

$$B_{\overline{P}_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) := \left\{ \overline{v} \in T_{\overline{P}_+}S^n \,\middle|\, |\overline{v}| < \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right\}$$

とし，それぞれ指数写像を

$$\mathrm{Exp}_{P_+} : B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) \to \widetilde{B}_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) = M\backslash\{P_-\} \subset M,$$

$$\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+} : B_{\overline{P}_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) \to \widetilde{B}_{\overline{P}_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) = S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\backslash\{\overline{P}_-\} \subset S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$$

を考える．そこで，次の図式が可換となるように，写像 $\widetilde{\varphi}$ を定義する．

$$\begin{array}{ccc} B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & B_{\overline{P}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) \\ \mathrm{Exp}_{P_+}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+} \\ M\backslash\{P_-\} & \xrightarrow[\ \widetilde{\varphi}\ ]{} & S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\backslash\{\overline{P}_-\} \end{array} \tag{4.112}$$

このとき，

(1) $\widetilde{\varphi}$ は $M\backslash\{P_-\}$ から $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ の上への微分同相となり，

(2) さらに，$\widetilde{\varphi}(P_-) = \overline{P}_-$ によって，$\widetilde{\varphi}$ は M から $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ の上への位相同相に拡張される．

（第7段）そこでこのとき，$\widetilde{\varphi}$ が $M\backslash\{P_-\}$ から $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\backslash\{\overline{P}_-\}$ の上への等長写像となっていることを見る．このために，$v \in B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) \subset T_{P_+}M$，および $\overline{v} = \varphi(v) \in B_{\overline{P}_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right) \subset S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ としたとき，(4.112) の微分写像に関する可換図式

$$\begin{array}{ccc} Tv\left(B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)\right) & \xrightarrow{\ \varphi_{*v}\ } & T_{\overline{v}}\left(B_{\overline{P}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)\right) \\ \mathrm{Exp}_{P_{+*v}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\mathrm{Exp}_{\overline{P}_{+*\overline{v}}} \\ T_{\mathrm{Exp}_{P_+}(v)}(M\backslash\{P_-\}) & \xrightarrow[\ \widetilde{\varphi}_*\ ]{} & T_{\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+}(\overline{v})}\left(S^n\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\backslash\{\overline{P}_-\}\right) \end{array} \tag{4.113}$$

において，$T_v(B_{P_+}(\frac{\pi}{\sqrt{K}}))$ と $T_{P_+}M$ とを同一視し，$w \in T_{P_+}M$ に対して，$B_{P_+}(\frac{\pi}{\sqrt{K}})$ 内の直線「$s \mapsto v + sw$」の $s = 0$ での微分を対応させることによって同一視する．この同一視によって $T_{P_+}M$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とそのノルム $|\cdot|$ から，$T_v(B_{P_+}(\frac{\pi}{\sqrt{K}}))$ 上に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とそのノルム $|\cdot|$ を入れる．また，$S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ についても同様とする．

このとき，

$$\varphi_{*v} : T_v\left(B_{P_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)\right) \to T_{\overline{v}}\left(B_{\overline{P}_+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)\right) \tag{4.114}$$

は等長写像となっているので，$\overline{w} := \varphi(w)$ $(0 \neq w \in T_{P_+}M)$ に対して，

$$\frac{|\mathrm{Exp}_{P_+*}(w)|}{|w|} = \frac{|\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+*}(\overline{w})|}{|\overline{w}|} \tag{4.115}$$

を示せば，図式 (4.113) の下段の $\widetilde{\varphi}_*$ が等長となることがわかる．このことから，$\widetilde{\varphi} : M \backslash \{P_-\} \to S^n(\frac{1}{\sqrt{K}}) \backslash \{\overline{P}_-\}$ が等長写像となる．したがって，M 内の開集合 $M \backslash \{P_-\}$ は定曲率 K のリーマン多様体となり，断面曲率の連続性より，(M, g) もまた定曲率 K となる．さらに第 6 段 (2) により，$\widetilde{\varphi}$ によって M と $S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ とは位相同型であったので，結局，(M, g) と $S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ とは等長となり，定理 4.20 の証明が終わる．

（第 8 段）以下の数段において，等式 (4.115) を示す．このためにまず，P_+ を通る測地線 $\gamma(t) := \mathrm{Exp}_{P_+}(t\,\theta)$ $(\theta \in S_{P_+})$ について，$\gamma(t)$ に沿ったヤコビ場 $Y(t)$ で，初期条件

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = w, \quad \langle w, \theta \rangle = 0$$

を満たすものを取る．このとき，任意の $0 < t < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ に対して，

$$|Y(t)| = \frac{\sin\left(\sqrt{K}\,t\right)}{\sqrt{K}}\,|Y'(0)| = \frac{\sin\left(\sqrt{K}\,t\right)}{\sqrt{K}}\,|w| \tag{4.116}$$

が成り立つことを示そう．

もしこれが示されたとするならば，同様にして，今度は，$S^n(\frac{1}{\sqrt{K}})$ について，$\overline{P}_+$ を通る測地線 $\overline{\gamma}(t) := \mathrm{Exp}_{\overline{P}_+}(t\,\overline{\theta})$ $(\overline{\theta} \in S_{\overline{P}_+})$ に沿ったヤコビ場 $\overline{Y}(t)$

で，初期条件

$$\overline{Y}(0)=0, \quad \overline{Y}'(0)=\overline{w}, \quad \langle \overline{w},\overline{\theta}\rangle = 0$$

を取ると，

$$\overline{Y}(t)=\frac{\sin\left(\sqrt{K}\,t\right)}{\sqrt{K}}\,\overline{w}(t) \tag{4.117}$$

と与えられている．ここで$\overline{w}$ は $\overline{w}$ を $\overline{\gamma}(t)$ に沿って平行移動したものを表す．

さらに，補題 3.16 (2) により，

$$Y(t)=(\mathrm{Exp}_{P_+})_{*\,t\,\theta}(t\,w), \quad \overline{Y}(t)=(\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+})_{*\,t\,\overline{\theta}}(t\,\overline{w}) \tag{4.118}$$

であるので，以上を合わせて，$w\in T_{P_+}M$ (ただし $\langle w,\theta\rangle=0$, $\overline{w}=\varphi(w)$ となるもの) に対して，

$$\frac{|(\mathrm{Exp}_{P_+})_{*\,t\,\theta}(t\,w)|}{|w|}=\frac{\sin\left(\sqrt{K}\,t\right)}{\sqrt{K}}=\frac{|(\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+})_{*\,t\,\overline{\theta}}(t\,\overline{w})|}{|w|} \tag{4.119}$$

が成り立つことがわかった．

一方，$w=\theta$ に対しては，

$$(\mathrm{Exp}_{P_+})_{*\,t\,\theta}(\theta)=\dot{\gamma}(t), \quad (\mathrm{Exp}_{\overline{P}_+})_{*\,t\,\overline{\theta}}(\overline{\theta})=\dot{\overline{\gamma}}(t) \tag{4.120}$$

であるので，(4.115) が成り立っている．再び，補題 3.16 (1) を用いて，(4.115) がすべての $0\neq w\in T_{P_+}M$ について成立することがわかった．

（第9段）第8段における (4.116) 式を示そう．補題 3.16 の証明のように，測地線 $\gamma(t)$ に沿ったヤコビ場 $Y(t)$ から得られる測地線の族 $c_s(t)$ $(-\varepsilon<s<\varepsilon)$ は，補題 4.23 により，P_+ と P_- を通り，それ以外では $\gamma(t)$ とは交わらないのであるから，ある $0<t_0<\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ で，$Y(t_0)\neq 0$ となる．なお，共役点を超えては最短線を実現しないことに注意しよう．

(1) $|Y(t_0)|=1$ の場合．$\delta(s)$ を $\gamma(t_0)$ を出発する弧長によってパラメータ化された測地線で，$\dot{\delta}(0)=Y(t_0)$ となるものとする．さらに P_+ と $\delta(s)$ とを弧長に比例するパラメータをもつ測地線 $\gamma_s(t)$ で $\gamma_s(0)=P_+$, $\gamma_s(t_0)=\delta(s)$ を満たすものを取り，それを $\gamma_s(t)=\gamma(s,t)$ とする．

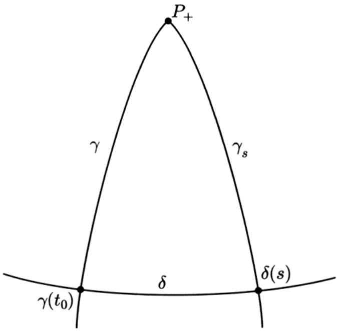


図 4.4 測地線 γ, γ_s と δ

このとき，γ_s の無限小変分ベクトル場 $Z(t) := \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma_s(t)$ は $\gamma(t)$ に沿ったヤコビ場で，$Z(0) = 0$ かつ $Z(t_0) = \dot{\delta}(0) = Y(t_0)$ を満たす．したがって $Y(t) = Z(t)$ $(\forall t)$ である．$Y(t) \neq Z(t)\,(\exists t)$ とすると，$\gamma(t_0)$ は P_+ の測地線 γ に沿った共役点となり，補題 4.23 より起こり得ない．

次に，$\ell(s)$ を P_+ から $\delta(s)$ までの γ_s の長さとする．このとき，$Y(t)$ がヤコビ場であることから，第 2 変分公式 ((1.47) を見よ) から，

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2\ell(s)}{ds^2}\right|_{s=0} &= -\int_0^{t_0} \langle Y''(t) + R(Y(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), Y(t)\rangle\, dt + \Big[\langle Y'(t), Y(t)\rangle\Big]_{t=0}^{t=t_0} \\ &= \langle Y'(t_0), Y(t_0)\rangle \end{aligned} \tag{4.121}$$

となる．

次に，$f(\delta(s))$ を計算すると，(4.109) より，

$$f(\delta(s)) = f(\gamma_s(t_0)) = \cos\left(\sqrt{K}\,\ell(s)\right). \tag{4.122}$$

他方，測地線 $\delta(s)$ について考えると，(4.105) と同様に，

$$f(\delta(s)) = A\cos\left(\sqrt{K}\,s\right) + B\sin\left(\sqrt{K}\,s\right) \tag{4.123}$$

であり，定数 A は $s = 0$ とおいて，

$$A = f(\delta(0)) = f(\gamma(t_0)) = \cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right) \tag{4.124}$$

のように求まる．B は次のように求まる．

$$(df)(\dot{\delta}(0)) = (df)(Y(t_0)) = \langle (\nabla f)_{\gamma(t_0)}, Y(t_0)\rangle, \tag{4.125}$$

ここで，$\langle \dot{\gamma}(t), Y(t)\rangle = 0\ (\forall\ t)$ であったから

$$(4.125)\ \text{の左辺} = \left.\frac{df(\delta(s))}{ds}\right|_{s=0} \sqrt{K}\,B, \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}(4.125)\ \text{の右辺} &= \langle (\nabla f)_{\gamma(t_0)}, Y(t_0)\rangle \\ &= -\sqrt{K}\,\sin\left(\sqrt{K}\,t_0\right)\langle \dot{\gamma}(t_0), Y(t_0)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}\tag{4.127}$$

したがって，(4.125), (4.126), (4.127) より，$B=0$ となる．結局，

$$f(\delta(s)) = \cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right)\cos\left(\sqrt{K}\,s\right) = \cos\left(\sqrt{K}\,\ell(s)\right) \tag{4.128}$$

となる．(4.128) の両辺を $s=0$ において s に関して2階微分する．γ は測地線であるので，定理 1.5（第1変分公式）より $\frac{d\ell(s)}{ds}|_{s=0} = 0$ であり，$\ell(0)$ は $\gamma_0 = \gamma$ の P_+ から $\delta(0) = \gamma(t_0)$ までの長さ t_0 なので，

$$\left.\frac{d^2\ell(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = \sqrt{K}\,\frac{\cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}{\sin\left(\sqrt{K}\,\ell(0)\right)} = \sqrt{K}\,\frac{\cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}{\sin\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}. \tag{4.129}$$

(4.121) より，

$$\langle Y'(t_0), Y(t_0)\rangle = \sqrt{K}\,\frac{\cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}{\sin\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}. \tag{4.130}$$

(2) $|Y(t_0)| \neq 1$ のときは，$\widetilde{Y}(t) := \frac{Y(t)}{|Y(t)|}$ を考え，上記と同様の議論により，

$$\frac{\langle Y'(t), Y(t_0)\rangle}{\langle Y(t_0), Y(t_0)\rangle} = \sqrt{K}\,\frac{\cos\left(\sqrt{K}\,t_0\right)}{\sin\left(\sqrt{K}\,t_0\right)} \tag{4.131}$$

を得る．$0 < t_0 < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ は任意であったので，(4.131) より，

$$\frac{d}{dt}\log\left(|Y(t)|\right) = \frac{d}{dt}\log\left(\sin\left(\sqrt{K}\,t\right)\right) \tag{4.132}$$

を得る．したがって，

$$|Y(t)| = C \sin\left(\sqrt{K}\, t\right) \quad (C\ \text{は定数}) \tag{4.133}$$

を得る．ここで C は $\langle Y(t), Y(t)\rangle = C^2 \sin^2\left(\sqrt{K}\, t\right)$ の両辺を $t=0$ で t に関して 2 階微分して，$C = \frac{|Y'(0)|}{\sqrt{K}}$ となるので，(4.116) すなわち，

$$|Y(t)| = \frac{\sin\left(\sqrt{K}\, t\right)}{\sqrt{K}}\, |Y'(0)| = \frac{\sin\left(\sqrt{K}\, t\right)}{\sqrt{K}}\, |w| \tag{4.134}$$

を得た．

以上より，小畠の定理 4.20 を得た．□

第5章 ◇ ディリクレ固有値のペイン・ポリヤ・ワインバーガー型不等式

本章では，任意の完備リーマン多様体 (M,g) 内の任意の有界領域 D 上のラプラス作用素 Δ_g のディリクレ境界値固有値問題の第 k 固有関数に対するペイン・ポリヤ・ワインバーガー型不等式について述べる．近年，Q-M. Cheng（チェン，成 慶明）らの仕事により，ディリクレ境界値固有値問題の第 k 固有関数の研究は大きく進展した．彼らの基本的な手法とそれに基づく彼らの研究成果の一端を紹介する．

5.1 本章の主な結果

(M,g) を n 次元連結な完備リーマン多様体とし，Δ を (M,g) のラプラス作用素とする．混乱がないときは，Δ_g の下付き g は明示しないことがある．$D \subset M$ を M 内の開領域で，その閉包 $\overline{D}$ がコンパクトであるものとする．$\partial D := \overline{D}\backslash D$ で D の境界を表す．次のようなディリクレ境界値固有値問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \nu\varphi & (D \text{ 上で}) \\ \varphi = 0 & (\partial D \text{ 上で}) \end{cases} \tag{5.1}$$

(5.1) が $\overline{D}$ 上で恒等的には零でない解 $\varphi \not\equiv 0$ をもつとき，ν を D 上の**ディリクレ固有値**とよび，φ をその固有値の**ディリクレ固有関数**と呼ぶ．(5.1) の固有値を重複度を込めて

$$(0<)\,\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_k \leq \cdots$$

と並べ，ν_k をディリクレ第 k 固有値という．さらに (4.3) の D 上の L^2 内積 $(\varphi,\psi) := \int_D \varphi\,\psi\,v_g$, および L^2 ノルム $\|\varphi\|^2 := (\varphi,\varphi)$ などの記号をそのまま踏襲するものとする．

始めに n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域 D 上のディリクレ境界値固有値 ν_k に関するペイン・ポリヤ・ワインバーガーの定理 ([45]) について述べる.

定理 5.1 **(ペイン・ポリヤ・ワインバーガーの定理)** n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域 D 上のディリクレ境界値固有値について, 任意の $k \geq 1$ に対して, 次の不等式が成立する：

$$\nu_{k+1} - \nu_k \leq \frac{4}{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\nu_i\right). \tag{5.2}$$

注意 5.2 ペイン・ポリヤ・ワインバーガーの定理はディリクレ固有値のなす数列 $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ の, 正数列としての特徴, すなわち,

"増大度 $\nu_{k+1} - \nu_k$ が過去の平均値 $\frac{\nu_1+\cdots+\nu_k}{k}$ で上から押さえられる"

ことを示す.

例えば, m 次の単項式 でできる数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a\,k^m\}_{k=1}^{\infty}$ $(m \geq 1,\, a > 0)$ を考える. $m \geq 4$ のときは, この数列は不等式 (5.2) を満たさず, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ はどんな有界領域 D を選んでもディリクレ固有値とはなり得ない.

$m = 3$ のときも, $n = \dim D = 1$ のときのみ (5.2) が成り立つが, 1 次元の開区間のディリクレ固有値の別の計算より, やはりディリクレ固有値とはなり得ない.

$m = 2$ のときは, $n = \dim D \geq 3$ のとき, (5.2) は不成立で, 3 次元以上の領域のディリクレ固有値にはなり得ない. 2 次元領域のディリクレ固有値にはなり得る.

本章では, 定理 5.1 を一般化した Q-M. チェン・H-C. ヤンによる一般のリーマン多様体 (M, g) 内の有界領域 D に対するディリクレ固有値 ν_k に対するペイン・ポリヤ・ワインバーガー型の不等式の定理 5.3 を述べ, 証明を与える. 定理 5.3 は定理 5.6 と 系 5.7 の抜粋である. なお, 勝田 篤氏は当初の原稿にあった誤りをご指摘頂いた. その修正の結果, 本書の (5.3), (5.3′), (5.38) の評価式がペイン・ポリヤ・ワインバーガーの不等式 (5.2) よりも +1 だけ粗くなった.

定理 5.3　**(チェン・ヤンの定理)**　(M,g) を n 次元連結な完備リーマン多様体であって，N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的にはめ込まれているとし，その平均曲率ベクトル場を H とする．D は その閉包 $\overline{D}$ がコンパクトとなる M 内の開領域で，∂D は C^2 とする．このとき D 上のディリクレ固有値問題 (5.1) の任意の第 k 固有値 ν_k に対して，

$$\mu_k := \nu_k + \frac{n^2}{4} \sup_D \langle H, H\rangle$$

とおく．ここで $\langle\, ,\, \rangle$ は N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ 上の内積である．このとき，μ_k $(k=1,2,\ldots)$ は次の不等式を満たす：

$$\mu_{k+1} - \mu_k \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu_i\right). \tag{5.3}$$

すなわち，

$$\nu_{k+1} - \nu_k \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu_i\right) + \left(n + \frac{n^2}{4}\right) \sup_D \langle H, H\rangle. \tag{5.3$'$}$$

注意 5.4　ナッシュの定理 ([41]) 及びグロモフの仕事 ([29], [30]) によれば，任意のリーマン多様体 (M,g) は十分大きな N を取れば，N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的に埋め込まれているので，定理 5.3 の仮定は満たされている．特に，(M,g) が $\mathbb{R}^N$ に等長かつ極小に，はめ込まれるときには，$H \equiv 0$ となるので，$\mu_k = \nu_k$ である．実際，任意の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^N$ $(N \geq n)$ に等長かつ極小にはめ込まれているので，$\frac{4}{n}$ と $1 + \frac{4}{n}$ の違いはあるが，定理 5.3 は定理 5.1 の一般化したものである．しかし，M がコンパクトのときには，(M,g) はどんな $\mathbb{R}^N$ にも決して等長かつ極小に，はめ込まれることはない (例えば [35], Vol. II, Chapter VII, §5, p. 34).

N 次元空間内 $\mathbb{R}^N$ 内の極小部分多様体，とりわけ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面は盛んに研究が行われている（例えば [35]，[47]，[51] などを見よ）.

5.2 予備的な L^2 評価

定理 5.3 の証明の基礎となるのは，Q-M. チェン・H-C. ヤンによる次の予備定理である．その証明は長大なもので，9 頁に亙る．得られている評価式 (5.4) は興味深いもので，今後の応用が期待されている．

定理 5.5 **（チェン・ヤンの予備定理）** (M,g) を n 次元連結な完備リーマン多様体とし，$D\subset M$ を $\overline{D}$ がコンパクトで ∂D は C^2 であるような M 内の開領域とする．D 上のディリクレ固有値問題 (5.1) の第 k 固有値を ν_k とし，その対応する第 k 固有関数 φ_k $(k=1,2,\ldots)$ は内積 $(\varphi,\psi):=\int_D \varphi\,\psi\,v_g$ に関して正規直交系をなすとする．このとき，任意の $k=1,2,\ldots$ と $\overline{D}$ 上の任意の連続関数 h で，$h\in C^3(D)\cap C^2(\partial D)$ であるものに対して，次の不等式が成立する：

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,\|\varphi_i\,\nabla h\|^2\leq\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|2\,\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2. \quad (5.4)$$

ここで左辺の $\|\cdot\|$ は $\overline{D}$ 上連続なベクトル場 X について $\|X\|^2=\int_D g(X,X)\,v_g$ であり，右辺の $\|\cdot\|$ は $\|\varphi\|^2:=\int_D\varphi^2\,v_g$ $(\varphi\in L^2(D))$ を表す．

証明 $\overline{D}$ 上の関数 φ_i $(i=1,2,\ldots)$ は次を満たす：

$$\begin{cases}\Delta\varphi_i=\nu_i\,\varphi_i & (D\ \text{上})\\ \varphi_i=0 & (\partial D\ \text{上})\\ \displaystyle\int_D\varphi_i\,\varphi_j=\delta_{ij} & (i,\,j=1,2,\ldots).\end{cases} \quad (5.5)$$

さらに，

$$(0<)\,\nu_1\leq\nu_2\leq\cdots\leq\nu_k\leq\nu_{k+1}\leq\cdots. \quad (5.6)$$

（第 1 段）そこで，次の定義をする：任意の $k=1,2,\ldots$ と $i,j=1,\ldots,k$ に対して，

$$\begin{cases} a_{ij} := \int_D h\,\varphi_i\,\varphi_j\,v_g \\ \psi_i := h\,\varphi_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\varphi_j \\ b_{ij} := \int_D \varphi_j\,\left(\langle \nabla\varphi_i, \nabla h\rangle - \frac{1}{2}\,\varphi_i\,\Delta h\right)\,v_g \end{cases} \tag{5.7}$$

このとき，次が成り立つ．

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{5.8}$$

$$\int_D \psi_i\,\varphi_j\,v_g = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, k). \tag{5.9}$$

実際，(5.8) は明らかであるが，(5.9) は次のようにして示される．

$$\begin{aligned} \int_D \psi_i\,\varphi_j\,v_g &= \int_D \left(h\,\varphi_i - \sum_{s=1}^{k} a_{is}\,\varphi_s\right)\,\varphi_j\,v_g \\ &= \int_D h\,\varphi_i\,\varphi_j\,v_g - \sum_{s=1}^{k} a_{is}\,\delta_{sj} \\ &= \int_D h\,\varphi_i\,\varphi_j\,v_g - a_{ij} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

したがって，(5.9) より，次の不等式が従う．

$$\begin{aligned} \nu_{k+1} &= \inf_{\substack{\int_D v\varphi_j\,v_g = 0\,(j=1,\ldots,k) \\ v \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla v|^2\,v_g}{\int_D v^2\,v_g} \\ &\leq \frac{\int_D |\nabla\psi_i|^2\,v_g}{\int_D {\psi_i}^2\,v_g}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

（第2段）$b_{ij} = -b_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ となる．

なぜなら，$\Delta(h\,\varphi_i) = (\Delta h)\,\varphi_i - 2\langle \nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + h\,(\Delta\varphi_i)$ なので，

$$\nu_j\,a_{ij} = \nu_j \int_D h\,\varphi_i\,\varphi_j\,v_g$$

$$= \int_D h\,\varphi_i(\Delta\,\varphi_j)\,v_g$$

$$= \int_D \Delta(h\,\varphi_i)\,\varphi_j\,v_g$$

$$= \int_D \{(\Delta\,h)\,\varphi_i - 2\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + h\,(\Delta\varphi_i)\}\,\varphi_j\,v_g$$

$$= \int_D \{(\Delta\,h)\varphi_i\,\varphi_j - 2\varphi_j\,\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + \nu_i\,h\,\varphi_i\,\varphi_j\}\,v_g$$

$$= -2\,b_{ij} + \nu_i\,a_{ij}. \tag{5.12}$$

したがって，(5.12) より，

$$2\int_D \varphi_j\,\left(\langle\nabla\varphi_i, \nabla h\rangle - \frac{1}{2}\,\varphi_i\,\Delta h\right)\,v_g = 2\,b_{ij} = (\nu_i - \nu_j)\,a_{ij} = -2\,b_{ji}, \tag{5.13}$$

特に，$b_{ij} = -b_{ji}$ を得た．

（第3段）$w_i := \int_D \psi_i\,(\varphi_i\,\Delta h - 2\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle)\,v_g$ とおくと，

$$0 \le (\nu_{k+1} - \nu_i)\,\|\psi_i\|^2 \le w_i. \tag{5.14}$$

なぜなら，

$$\Delta\psi_i = \Delta(h\,\varphi_i) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\Delta\varphi_j$$

$$= \nu_i\,h\,\varphi_i - 2\,\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + \varphi_i\,\Delta h - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\nu_j\,\varphi_j \tag{5.15}$$

なので，

$$\int_D |\nabla\psi_i|^2\,v_g = \int_D \psi_i\,(\Delta\psi_i)\,v_g$$

$$= \int_D \psi_i\,\left(\nu_i\,h\,\varphi_i - 2\,\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + \varphi_i\,\Delta h - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\nu_j\,\varphi_j\right)\,v_g$$

$$= \nu_i\,\int_D \psi_i\,h\,\varphi_i\,v_g + \int_D \psi_i\{-2\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle + \varphi_i\,\Delta h\}\,v_g \quad \text{((5.9) より)}$$

$$= \nu_i \int_D {\psi_i}^2 \, v_g + \int_D \psi_i \{-2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle + \varphi_i \, \Delta h\} \, v_g \tag{5.16}$$

(5.16) の最後の等号は，(5.9) より，

$$\int_D {\psi_i}^2 \, v_g = \int_D \psi_i \left(h \, \varphi_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \, \varphi_j \right) v_g = \int_D \psi_i \, h \, \varphi_i \, v_g \tag{5.17}$$

となるから，(5.17) を代入して (5.16) を得る．そこで，$i = 1, \ldots, k$ に対して，(5.11) より，

$$\begin{aligned} 0 \leq (\nu_{k+1} - \nu_i) \, \|\psi_i\|^2 &\leq \int_D |\nabla \psi_i|^2 \, v_g - \int_D |\nabla \psi_i|^2 \, v_g \\ &\qquad - \int_D \psi_i \{-2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle + \varphi_i \, \Delta h\} \, v_g \\ &= - \int_D \psi_i \{-2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle + \varphi_i \, \Delta h\} \, v_g \\ &= w_i. \end{aligned} \tag{5.18}$$

(5.18) は求める (5.14) である．

（第4段）w_i $(i = 1, \ldots, k)$ は次を満たす．

$$(\nu_{k+1} - \nu_i) \, w_i \leq \|2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle - \varphi_i \, \Delta h\|^2 - 4 \sum_{j=1}^{k} {b_{ij}}^2. \tag{5.19}$$

実際，(5.19) は次のように示される．w_i と ψ_i の定義より，

$$\begin{aligned} w_i &= - \int_D \left(h \, \varphi_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \, \varphi_j \right) (2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle - \varphi_i \, \Delta h) \, v_g \\ &= - \int_D 2 \, h \, \varphi_i \, \langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle \, v_g + \int_D h \, {\varphi_i}^2 \, \Delta h \, v_g \\ &\quad + \int_D \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \, \varphi_j \, (2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle - \varphi_i \, \Delta h) \, v_g. \end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで (5.20) の第3項は (5.13) より，$\sum_{j=1}^{k}(\nu_i - \nu_j)\, {a_{ij}}^2$ と一致し，第1項と第2項は

$$-\int_D 2\, h\, \varphi_i \,\langle \nabla h, \nabla \varphi_i \rangle\, v_g + \int_D h\, {\varphi_i}^2\, \Delta h\, v_g = \|\varphi_i\, \nabla h\|^2 \tag{5.21}$$

となる．なぜなら，次の (5.22) が成り立つからである：

$$\begin{aligned}\int_D h\, {\varphi_i}^2\, \Delta h\, v_g &= \int_D \langle \nabla (h\, {\varphi_i}^2), \nabla h\rangle\, v_g \quad (\varphi_i = 0\ (\partial D \text{ 上}) \text{ だから}) \\ &= \int_D \langle \varphi_i\, \nabla h, \varphi_i\, \nabla h\rangle + \int_D 2\, h\, \varphi_i\, \langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle\, v_g \\ &= \|\varphi_i\, \nabla h\|^2 + \int_D 2\, h\, \varphi_i \langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle\, v_g. \end{aligned} \tag{5.22}$$

以上より，

$$w_i = \|\varphi_i\, \nabla h\|^2 + \sum_{j=1}^{k} (\nu_i - \nu_j)\, {a_{ij}}^2 \tag{5.23}$$

を得た．他方，w_i はその定義と $\int_D \psi_i\, \varphi_j\, v_g = 0\ (i, j = 1, \dots, k)$ を使い，

$$\begin{aligned} w_i &= -\int_D \psi_i\, (2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle - \varphi_i\, \Delta h)\, v_g \\ &= -\int_D \psi_i\, \left(2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle - \varphi_i\, \Delta h - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, \varphi_j \right) v_g \end{aligned} \tag{5.24}$$

となるので，(5.24) を代入して，コーシー・シュワルツの不等式を使い，

$$\begin{aligned} (\nu_{k+1} - \nu_i)\, {w_i}^2 &= (\nu_{k+1} - \nu_i) \left(\int_D \psi_i \left\{ 2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle - \varphi_i\, \Delta h - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, \varphi_j \right\} v_g \right)^2 \\ &\le (\nu_{k+1} - \nu_i)\, \|\psi_i\|^2 \left\| 2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle - \varphi_i\, \Delta h - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, \varphi_j \right\|^2 \\ &\le w_i \left(\|2\langle \nabla h, \nabla \varphi_i\rangle - \varphi_i\, \Delta h\|^2 - 4\sum_{j=1}^{k} {b_{ij}}^2 \right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

(5.25) の最後の不等式は，(5.14) を $(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|\psi_i\|^2$ の評価に使い，さらに，

$$\left\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h-2\sum_{j=1}^{k}b_{ij}\,\varphi_j\right\|^2=\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2$$

$$-4\int_D\Big(2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\Big)\left(\sum_{j=1}^{k}b_{ij}\,\varphi_j\right)v_g+4\left\|\sum_{j=1}^{k}b_{ij}\,\varphi_j\right\|^2$$

$$=\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2-8\sum_{j=1}^{k}b_{ij}\,b_{ij}+4\sum_{j=1}^{k}{b_{ij}}^2$$

$$=\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2-4\sum_{j=1}^{k}{b_{ij}}^2. \tag{5.26}$$

ここで，最後から2番目の等式で b_{ij} の定義 5.7 と $(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}$ を使った．

最後に，(5.25) において，(5.14) より $w_i\geq 0$ なので，$w_i\not\equiv 0$ のときは両辺を w_i で割れば，(5.19) を得る．$w_i\equiv 0$ のとき (5.19) は

$$4\sum_{j=1}^{k}{b_{ij}}^2\leq\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2 \qquad (\#)$$

と同値である．この不等式 (#) は次のようにして示される．(5.13) より，

$$4\sum_{j=1}^{k}{b_{ij}}^2=\sum_{j=1}^{k}\left(\int_D\varphi_j\,\left\{2\,\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\right\}\,v_g\right)^2$$

$$\leq\|2\,\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2.$$

ここで最後の不等式は，$P\varphi:=\sum_{j=1}^{k}(\varphi,\varphi_j)\,\varphi_j$ とするとき，

$$\sum_{j=1}^{k}(\varphi,\varphi_j)^2=\|P\varphi\|^2\leq\|\varphi\|^2 \qquad \text{(Parseval の不等式)}$$

が成り立つので，これを，$\varphi:=2\,\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h$ に適用すればよい．

（第5段）(5.19) 式の両辺に $(\nu_{k+1}-\nu_i)$ を掛けて，$i=1,\ldots,k$ について和を取るとすると，(5.12) より，$2\,b_{ij}=(\nu_i-\nu_j)\,a_{ij}$ なので，

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,w_i$$

$$\le \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\left\{\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2-4\sum_{j=1}^{k}{b_{ij}}^2\right\}$$

$$=-4\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,{b_{ij}}^2+\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,(\nu_i-\nu_j)^2\,{a_{ij}}^2$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2. \tag{5.27}$$

（第 6 段）(5.23) より,

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,w_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\left\{\|\varphi_i\,\nabla h\|^2+\sum_{j=1}^{k}(\nu_i-\nu_j)\,{a_{ij}}^2\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,\|\varphi_i\,\nabla h\|^2+\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,(\nu_i-\nu_j)\,{a_{ij}}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,\|\varphi_i\,\nabla h\|^2$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\frac{1}{2}\left[(\nu_{k+1}-\nu_i)^2-(\nu_{k+1}-\nu_j)^2\right](\nu_i-\nu_j)\,{a_{ij}}^2 \tag{5.28}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\,\|\varphi_i\,\nabla h\|^2-\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,(\nu_i-\nu_j)^2\,{a_{ij}}^2 \tag{5.29}$$

となる．実際，(5.28) 式を得るには，次のことを見れば良い．i と j を入れ替えて，$a_{ij}=a_{ji}$ を使うと，

$$\sum_{i,j=1}^{k} (\nu_{k+1}-\nu_i)^2 (\nu_i-\nu_j)\, {a_{ij}}^2 = \sum_{i,j=1}^{k} (\nu_{k+1}-\nu_j)^2 (\nu_j-\nu_i)\, {a_{ji}}^2$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{k} (\nu_{k+1}-\nu_j)^2 (\nu_i-\nu_j)\, a_{ij} \tag{5.30}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \frac{1}{2}\left[(\nu_{k+1}-\nu_i)^2-(\nu_{k+1}-\nu_j)^2\right](\nu_i-\nu_j)\, {a_{ij}}^2. \tag{5.31}$$

最後の等式 (5.31) は，(5.30) の左辺と右辺を足して 2 で割って得た．次に，(5.29) 式を得るには，$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ より，

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{1}{2}\left[(\nu_{k+1}-\nu_i)^2-(\nu_{k+1}-\nu_j)^2\right](\nu_i-\nu_j)\, {a_{ij}}^2$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{k} \frac{1}{2}(\nu_{k+1}-\nu_i+\nu_{k+1}-\nu_j)(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_j)(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2. \tag{5.32}$$

ここで，最後の等式を得るのに，$a_{ij}=a_{ji}$ を使った．(5.32) より，(5.29) 式を得た．

（第7段）(5.27) と (5.29) より，

$$-\sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|2\langle\nabla h,\nabla\varphi_i\rangle-\varphi_i\,\Delta h\|^2$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\, w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\, \|\varphi_i\, \nabla h\|^2 - \sum_{i,j=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,(\nu_i-\nu_j)^2\, {a_{ij}}^2. \qquad (5.33)$$

ここで (5.33) 式の左辺の第1項と右辺の第2項は同じものであるので，

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\|2\langle\nabla h, \nabla\varphi_i\rangle - \varphi_i\,\Delta h\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2\, \|\varphi_i\, \nabla h\|^2. \quad (5.34)$$

(5.34) 式は欲しかった (5.4) 式である.□

5.3 チェン・ヤンの定理と系

さて，Q-M. チェンと H-C. ヤンの定理とその系について述べよう．その証明は N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ への等長はめ込みに関する基礎的事項，及びそれらのラプラス作用素との関連事項の準備の後に与えられる.

定理 5.6 （チェン・ヤンの定理） (M, g) を n 次元連結な完備リーマン多様体とし，N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的にはめ込まれているとする．その平均曲率ベクトル場を H とする．$D \subset M$ を $\overline{D}$ がコンパクトな M 内の開領域とする．D 上のディリクレ境界値固有値問題の第 k 固有値 ν_k に対して，

$$\mu_k := \nu_k + \frac{n^2}{4}\,\|H\|^2 \qquad (5.35)$$

とおく．ここに $\|H\|^2 := \sup_D\langle H, H\rangle$ とおく．ただし $\langle\, ,\, \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ 上の標準ユークリッド内積である.

このとき，次の不等式が成立する：

$$\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)^2 \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\mu_{k+1}-\mu_i)\,\mu_i. \qquad (5.36)$$

系 5.7 定理 5.6 と同じ仮定の下に，次の不等式が成立する：

$$\mu_{k+1} \leq \left(2 + \frac{4}{n}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_i, \tag{5.37}$$

$$\mu_{k+1} - \mu_k \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_i, \tag{5.38}$$

$$\frac{nk}{n+4} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\mu_{k+1} - \mu_i}, \tag{5.39}$$

特に (M, g) が N ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的かつ極小にはめ込まれているときは，$\|H\|^2 = 0$ であるので，定理 5.6 と系 5.7 より，次の系が得られる．

系 5.8 定理 5.6 において特に，(M, g) が N ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長的かつ極小にはめ込まれているとする．このとき $\overline{D}$ がコンパクトな M 内の開領域 D 上のディリクレ境界値固有値問題の第 k 固有値 ν_k について，次の不等式が成立する：

$$\sum_{i=1}^{k} (\nu_{k+1} - \nu_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\nu_{k+1} - \nu_i)\, \nu_i, \tag{5.40}$$

$$\nu_{k+1} \leq \left(2 + \frac{4}{n}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \nu_i, \tag{5.41}$$

$$\nu_{k+1} - \nu_k \leq \left(1 + \frac{4}{n}\right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \nu_i, \tag{5.42}$$

$$\frac{nk}{n+4} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\nu_i}{\nu_{k+1} - \nu_i}. \tag{5.43}$$

証明 定理 5.6 を仮定し，系 5.7 を示す．定理 5.6 の証明は次節において行うこととする．すなわち，(5.36) 式から，(5.37), (5.38), (5.39) が導かれることを示そう．

(5.36) 式において $x := \mu_{k+1}$ とおくと，

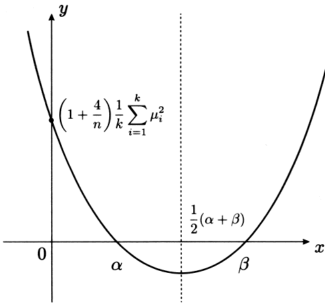


図 5.1　(5.45) の関数 y のグラフ

$$\sum_{i=1}^{k}(x-\mu_i)^2 \le \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(x-\mu_i)\mu_i \tag{5.44}$$

となる．この式を x について整理すると，

$$y := x^2 - x\left(2+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i + \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}{\mu_i}^2 \le 0. \tag{5.45}$$

(5.45) 式は x の 2 次関数についての不等式であり，$y=0$ の 2 根を $0<\alpha\le\beta$ とする．任意の $x_0\in[\alpha,\beta]$ に対して，$x_0\le\alpha+\beta=\left(2+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i$ であるので，特に，

$$\mu_{k+1} = x \le \alpha+\beta = \left(2+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i \tag{5.46}$$

となる．(5.37) を得た．(5.37) 式の右辺のかっこを外して，

$$\mu_{k+1} \le \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i + \frac{4}{nk}\sum_{i=1}^{k}\mu_i \tag{5.47}$$

ゆえに (5.47) より

$$\mu_{k+1}-\mu_k \le \mu_{k+1}-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i \le \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i, \tag{5.48}$$

すなわち (5.38) を得た．

最後に (5.48) 式から (5.39) 式を導く．実際，(5.48) の2番目の不等式より

$$\frac{k}{1+\frac{4}{n}}\left(\mu_{k+1}-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i\right)\leq\sum_{i=1}^{k}\mu_i, \tag{5.49}$$

あるいは

$$\frac{nk}{n+4}=\frac{k}{1+\frac{4}{n}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{k}\mu_i}{\mu_{k+1}-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i}. \tag{5.50}$$

そこで，

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\mu_i}{\mu_{k+1}-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i}\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\mu_{k+1}-\mu_i} \tag{5.51}$$

を示そう．実際，次の関数を考える：

$$f(x):=\frac{x}{\mu_{k+1}-x}\qquad(0<x<\mu_{k+1}) \tag{5.52}$$

このとき，

$$f''(x)=\frac{2\,\mu_{k+1}}{(\mu_{k+1}-x)^3}>0\qquad(0<x<\mu_{k+1}) \tag{5.53}$$

であるので，$f(x)$ は $0<x<\mu_{k+1}$ において凸関数である．

ゆえに，$\alpha_i>0$ $(i=1,\ldots,k)$ かつ $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$ ならば，

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,\mu_i\right)\leq\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,f(\mu_i)$$

が任意の $0<\mu_i<\mu_{k+1}$ $(i=1,\ldots,k)$ に対して成り立つ．特に，$\alpha_i=\frac{1}{k}$ $(i=1,\ldots,k)$ とすると，

$$f\left(\frac{\mu_1+\cdots+\mu_k}{k}\right)\leq\frac{f(\mu_1)+\cdots+f(\mu_k)}{k} \tag{5.54}$$

となる，したがって，

$$\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i}{\mu_{k+1}-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i}\leq\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\mu_{k+1}-\mu_i} \tag{5.55}$$

を得た．これは欲しかった (5.51) である．以上より (5.39) を得た．□

5.4　定理 5.6 の証明のための基礎的準備

始めに n 次元連結な完備リーマン多様体 (M, g) の N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ への等長はめ込みについて，その基本的な性質とそれから導かれる (M, g) 上のラプラス作用素に関する補題 5.9 を示す．そこで，予備定理 5.5 と補題 5.9 を使い，定理5.5において定理 5.6 の証明を行う．

5.4.1　等長はめ込みと勾配ベクトル場

まず，N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ について，その上の標準座標系を $(y^1, \ldots, y^N)$ とし，また，$\mathbb{R}^N$ 上の標準ユークリッド内積を $\langle , \rangle$ とする．このとき，$\mathbb{R}^N$ 上の N 個のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$ は

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\, \beta = 1, \ldots, N) \tag{5.56}$$

を満たす．

次に，n 次元連結な完備リーマン多様体 (M, g) が N 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^N, \langle , \rangle)$ に等長的にはめ込まれているとする：$M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$．このことより，$M$ の任意の点 $p \in M$ を $p = (y^1(p), \ldots, y^N(p)) \in \mathbb{R}^N$ と書くことができる．以下では，M から $\mathbb{R}^N$ へのはめ込み写像は記号が煩雑になるのでいちいち書かず省略する．

M 上の局所座標近傍系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を取る．U の点 p を $\mathbb{R}^N$ 上の点と見なし U 上の座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いると，$\mathbb{R}^N$ の位置ベクトル $y(p) = (y^1(p), \ldots, y^N(p))$ は

$$y^\alpha(p) = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n) \quad (\alpha = 1, \ldots, N) \tag{5.57}$$

と書くことができ，(5.57) により各 y^α $(\alpha = 1, \ldots, N)$ を U 上の関数と見て，$(x^1, \ldots, x^n)$ を変数とする関数とみなすことができる．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

であるので，(5.56) を使い，はめ込み $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ が等長であることは次が成り立つことと同値である．

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}. \tag{5.58}$$

次に，(M, g) 上の勾配ベクトル場をみる．M 上の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ の勾配ベクトル場 ∇f は次のように記述される．

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.59}$$

ここで $(g^{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ は $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ の逆行列である．したがって，$u, v \in C^\infty(M)$ に対して，

$$g(\nabla u, \nabla v) = g\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{k\ell} \frac{\partial v}{\partial x^\ell} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} g^{ij} g^{k\ell} g_{ik} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial v}{\partial x^\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \tag{5.60}$$

が成り立つ．特に，これから，$u = v = y_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$ のときは，

$$\sum_{\alpha=1}^{N} g(\nabla y^\alpha, \nabla y^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1} g^{ij} g_{ij} \qquad ((5.58)\ \text{より})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = n \tag{5.61}$$

を得る．

5.4.2　等長はめ込みと接続

次に $\mathbb{R}^N$ 上の標準接続 ∇^N は

$$\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, N) \tag{5.62}$$

を満たすものとして定義されていた．(M, g) の $\mathbb{R}^N$ への等長はめ込み $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に対して，さらに，各点 $p \in M$ に対し，$p \in M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ での $\mathbb{R}^N$ の接空間 $T_p\mathbb{R}^N$ の直交直和分解

$$T_p\mathbb{R}^N = T_pM \oplus T_p^\perp M \tag{5.63}$$

に従い，M 上の C^∞ ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\nabla^N_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{5.64}$$

と分解する．ここで ∇ は (M, g) のレビ・チビタ接続であり，双線形写像 $B : T_pM \times T_pM \to T_p^\perp M$ は**第二基本形式**と呼ばれている．さらに，$\{e_i\}(i = 1, \ldots, n)$ を (M, g) 上の局所正規直交枠としたとき，

$$H := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) \in T_p^\perp M \tag{5.65}$$

は，はめ込み $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に沿った**平均曲率ベクトル場** と呼ばれている．$H \equiv 0$ のとき，はめ込み $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ は**極小**と呼ばれている．

このとき，等長はめ込み $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{5.66}$$

$$\left\langle \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right\rangle = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, N). \tag{5.67}$$

実際，$i, j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \nabla^N_{\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^N \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^\beta} + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\} \\
&= \sum_{\beta=1}^N \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right) \right\} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \\
&= \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^\beta}
\end{aligned}$$

となり，(5.56) と (5.66) により，(5.67) が成り立つ．

5.4.3 等長はめ込みとラプラス作用素に関する補題

さらに，次の補題が成立する．

補題 5.9 任意の $u \in C^\infty(M)$ に対して，次が成り立つ：

(1) $$\sum_{\alpha=1}^N g(\nabla y^\alpha, \nabla u)^2 = |\nabla u|^2. \tag{5.68}$$

(2) $$\sum_{\alpha=1}^N (\Delta y^\alpha)^2 = n^2\, |H|^2. \tag{5.69}$$

(3) $$\sum_{\alpha=1}^N (\Delta y^\alpha)\, \nabla y^\alpha = 0. \tag{5.70}$$

ここで $|H|^2 := \langle H, H \rangle$, かつ $|\nabla u|^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle = g(\nabla u, \nabla u)$ である．

証明 ((1) の証明) M の任意の固定点 p を取る．$\mathbb{R}^N$ 上の座標系 $(y^1, \ldots, y^N)$ に関する p の座標を $(y^1(p), \ldots, y^N(p))$ とする．そこで，$\mathbb{R}^N$ 上の座標系

$(y^1,\dots,y^N)$ を，次のような座標系座標系 $(\overline{y}^1,\dots,\overline{y}^N)$ に取り替える：

$$\Bigl(y^1-y^1(p),\dots,y^N-y^N(p)\Bigr)=(\overline{y}^1,\dots,\overline{y}^N)\,A, \tag{5.71}$$

ただし，次が成り立つように選んでおく．

$$\begin{cases}\displaystyle\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\frac{\partial}{\partial\overline{y}^i}\right)_p\,\middle|\,\xi_i\in\mathbb{R}\,(i=1,\dots,n)\right\}=T_pM\\[2ex] \displaystyle g_p\Bigl(\left(\frac{\partial}{\partial\overline{y}^i}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial\overline{y}^j}\right)_p\Bigr)=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,\dots,n)\\[2ex] A=(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,N}\in O(N)\end{cases} \tag{5.72}$$

ここで行列 A は点 p のみに依存する N 次直交行列である．

座標系 $(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_N)$ について，$g_{\overline{i}\,\overline{j}}=g\left(\left(\frac{\partial}{\partial\overline{y}^i}\right),\left(\frac{\partial}{\partial\overline{y}^j}\right)\right)$，また，$(g^{\overline{k}\,\overline{\ell}})$ を $(g_{\overline{i}\,\overline{j}})$ の逆行列とすると，(5.72) より，$g^{\overline{i}\,\overline{j}}(p)=\delta_{\overline{i}\,\overline{j}}$ となるので，(5.60) 式は

$$g_p(\nabla u,\nabla v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\overline{y}^i}(p)\,\frac{\partial v}{\partial\overline{y}^i}(p) \tag{5.73}$$

となる．さらに (5.71) により，$a_{\alpha\beta}$ が 定数なので（p に依存はするが），

$$\nabla y^\alpha=\nabla\Bigl(y^\alpha(p)+\sum_{\beta=1}^{N}a_{\beta\alpha}\,\overline{y}^\beta\Bigr)=\sum_{\beta=1}^{N}a_{\beta\alpha}\,\nabla\,\overline{y}^\beta. \tag{5.74}$$

したがって，p において，

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{N}g_p(\nabla y^\alpha,\nabla u)^2&=\sum_{\alpha=1}^{M}g_p\Bigl(\sum_{\beta=1}^{N}a_{\beta\alpha}\,\nabla\,\overline{y}^\beta,\nabla u\Bigr)^2\\&=\sum_{\alpha=1}^{N}\Bigl\{\sum_{\beta=1}^{N}a_{\beta\alpha}\,g_p(\nabla\,\overline{y}^\beta,\nabla u)\Bigr\}^2\\&=\sum_{\alpha=1}^{N}\Bigl\{\sum_{\beta=1}^{N}a_{\beta\alpha}\,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{y}^\beta}{\partial\overline{y}^i}(p)\,\frac{\partial u}{\partial\overline{y}^i}(p)\Bigr\}^2\qquad(\text{(5.73) より})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha} \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \right\}^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\alpha}\, a_{j\alpha} \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^j}(p)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} a_{i\alpha}\, a_{j\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^j}(p)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^j}(p) \qquad ((5.72)\ より)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \right)^2. \tag{5.75}$$

他方，(5.60) より，p において，

$$|\nabla u|_p{}^2 = g_p((\nabla u)_p, (\nabla u)_p)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g^{\overline{i}\,\overline{j}}(p) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \frac{\partial u}{\partial \overline{y}^j}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{y}^i}(p) \right)^2. \tag{5.76}$$

(5.75) と (5.76) より，

$$\sum_{\alpha=1}^{N} g_p(\nabla y^\alpha, \nabla u)^2 = |\nabla u|_p{}^2. \tag{5.77}$$

$p \in M$ は任意の点なので，(1) の (5.68) 式を得た．

((2) の証明) われわれの (M, g) から $\mathbb{R}^N$ への等長はめ込みを $y : M \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^N$ と書き，任意のベクトル $a \in \mathbb{R}^N$ に対して，M 上の C^∞ 関数 f_a を

$$f_a(x) := \langle y(x), a \rangle \qquad (x \in M) \tag{5.78}$$

と定義する．このとき，任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$X\, f_a = \langle y_*(X), a \rangle \tag{5.79}$$

となる．ここに，$y_*(X_x) \in T_{y(x)}\mathbb{R}^N$ $(x \in M)$ であり，(5.79) の右辺において，$T_{y(x)}\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ と同一視している．このとき，更に，$Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\begin{aligned} X(Y f_a) &= X(\langle y_*(Y), a\rangle) \\ &= \langle \nabla^N_{y_* X} Y, a\rangle + \langle Y, \nabla^N_{y_* X}\, a\rangle \\ &= \langle \nabla^N_{y_* X} Y, a\rangle \qquad (a \text{ は定ベクトルなので，第 2 項は零である}) \\ &= \langle y_*(\nabla_X Y) + B(y_*(X), y_*(Y)), a\rangle \end{aligned} \tag{5.80}$$

ここで B は，はめ込み $y:\ M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の第二基本形式 (5.64) である．(5.80) より，

$$\begin{aligned} \Delta f_a &:= -\sum_{i=1}^n ({e_i}^2 - \nabla_{e_i} e_i)\, f_a \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle y_*(\nabla_{e_i} e_i) + B(y_*(e_i), y_*(e_i)) - y_*(\nabla_{e_i} e_i), a\rangle \\ &= -\left\langle \sum_{i=1}^n B(y_*(e_i), y_*(e_i)), a \right\rangle = -\langle n\, H, a\rangle \end{aligned} \tag{5.81}$$

を得る．ここで H は $y:\ M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の平均曲率ベクトル場 (5.65) である．(5.65) では y_* を省略している．

ここで，$a \in \mathbb{R}^N$ は任意であるので，(5.81) 式を $\mathbb{R}^N$ に値をもつ M 上の関数に関する等式と見なして，

$$\Delta y = -n\, H \tag{5.82}$$

と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N (\Delta y^\alpha)^2 &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^N (\Delta y^\alpha)\, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\beta=1}^N (\Delta y^\beta)\, \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle \\ &= \langle \Delta y, \Delta y\rangle \\ &= \langle -n\, H, -n\, H\rangle = n^2\, |H|^2, \end{aligned} \tag{5.83}$$

(2) の (5.69) 式を得た.

((3) の証明) 各 $i=1,\ldots,n$ と $\alpha=1,\ldots,N$ について, M 上の局所的に定義されているベクトル場

$$\nabla_i y^\alpha := \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.84}$$

を考えると, $\mathbb{R}^N$ に値をもつ M に沿った局所的に定義されたベクトル場

$$\nabla_i y := (\nabla_i y^1,\ldots,\nabla_i y^N) = \sum_{\alpha=1}^{N}(\nabla_i y^\alpha)\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{5.85}$$

は M に接しているので, (5.65) より, $i=1,\ldots,n$ に対して,

$$\langle -n\,H, \nabla_i y\rangle = 0. \tag{5.86}$$

ところが, (5.86) の左辺は (5.82) より,

$$\begin{aligned}\langle -n\,H, \nabla_i y\rangle &= \langle \Delta y, \nabla_i y\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \sum_{\beta=1}^{N}(\nabla_i y^\beta)\,\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right\rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\,(\nabla_i y^\alpha). \end{aligned} \tag{5.87}$$

したがって, (5.84) と合わせて, (5.70) の左辺は次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\,\nabla y^\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\,\sum_{i=1}^{n}\nabla_i y^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)\,(\nabla_i y^\alpha)\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.88}$$

最後の等式で (5.87) と (5.86) を使った. (3) における (5.70) 式を得た. □

5.5　定理 5.6 の証明

証明　定理 5.6 の証明を与える．

（第 1 段）$\overline{D}$ がコンパクトである開領域 D に対して，チェン・ヤンの予備定理 5.5 を $h = y^\alpha$ とおいて適用すれば，

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \|\varphi_i \nabla y^\alpha\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i) \|2\langle \nabla y^\alpha, \nabla\varphi_i\rangle - \varphi_i \Delta y^\alpha\|^2. \tag{5.89}$$

(5.89) を $\alpha = 1, \dots, N$ について和を取り，

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \sum_{\alpha=1}^{N}\|\varphi_i \nabla y^\alpha\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i) \sum_{\alpha=1}^{N}\|2\langle \nabla y^\alpha, \nabla\varphi_i\rangle - \varphi_i \Delta y^\alpha\|^2. \tag{5.90}$$

（第 2 段）ここで (5.90) の左辺は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \sum_{\alpha=1}^{N}\|\varphi_i \nabla y^\alpha\|^2 &= \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \sum_{\alpha=1}^{N}\int_D {\varphi_i}^2 |y^\alpha|^2 v_g \\
&= \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \int_D {\varphi_i}^2 \sum_{\alpha=1}^{N} |y^\alpha|^2 v_g \\
&= \sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \int_D {\varphi_i}^2 n\, v_g \quad \text{((5.61) より)} \\
&= n\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)^2 \qquad \left(\textstyle\int_D {\varphi_i}^2 v_g = 1 \text{ より}\right).
\end{aligned} \tag{5.91}$$

（第3段）他方，(5.90) の右辺は次のように計算される．

$$\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\int_D\left\{4\sum_{\alpha=1}^{N}|\langle\nabla y^\alpha,\nabla\varphi_i\rangle|^2+{\varphi_i}^2\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)^2\right.$$

$$\left.-4\sum_{\alpha=1}^{N}\langle\nabla y^\alpha,\nabla\varphi_i\rangle\,(\varphi_i\,\Delta y^\alpha)\right\}v_g$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\int_D\left\{4\sum_{\alpha=1}^{N}|\langle\nabla y^\alpha,\nabla\varphi_i\rangle|^2+{\varphi_i}^2\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta y^\alpha)^2\right.$$

$$\left.-2\sum_{\alpha=1}^{N}\langle(\Delta y^\alpha)\nabla y^\alpha,\nabla({\varphi_i}^2)\rangle\right\}v_g. \tag{5.92}$$

ここで，(5.92) の被積分関数の第1項は補題 5.9 (1) (5.68) により，$4\,|\nabla\,\varphi_i|^2$ と一致し，第2項は補題 5.9 (2) (5.69) により，${\varphi_i}^2\,n^2\,|H|^2$ と一致し，第3項は補題 5.9 (3) (5.70) により零である．したがって，

$$(5.92)=\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\int_D(4\,|\nabla\,\varphi_i|^2+n^2\,|H|^2\,{\varphi_i}^2)\,v_g. \tag{5.93}$$

ここで，

$$\int_D|\nabla\,\varphi_i|^2\,v_g=\int_D(\Delta\varphi_i)\,\varphi_i\,v_g=\nu_i. \tag{5.94}$$

さらに，

$$\int_D|H|^2\,{\varphi_i}^2\,v_g\le\sup_D|H|^2\int_D{\varphi_i}^2\,v_g=\|H\|^2. \tag{5.95}$$

(5.93), (5.94), (5.95) を合わせて，

$$(5.92)\le 4\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i)\,\nu_i+n^2\,\|H\|^2\sum_{i=1}^{k}(\nu_{k+1}-\nu_i) \tag{5.96}$$

を得た．

（第 4 段） 以上より，(5.91) と (5.96) を合わせて，

$$n \sum_{i=1}^{k} (\nu_{k+1} - \nu_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\nu_{k+1} - \nu_i)\, \nu_i + n^2 \|H\|^2 \sum_{i=1}^{k} (\nu_{k+1} - \nu_i) \tag{5.97}$$

を得た．ここで

$$\mu_i := \nu_i + \frac{n^2}{4} \|H\|^2 \tag{5.98}$$

とおけば，(5.97) 式は次の不等式と同等である．

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^{k} (\mu_{k+1} - \mu_i)^2 &\leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\mu_{k+1} - \mu_i) \left(\mu_i - \frac{n^2}{4} \|H\|^2 \right) \\ &\qquad + n^2 \|H\|^2 \sum_{i=1}^{k} (\mu_{k+1} - \mu_i) \\ &= 4 \sum_{i=1}^{k} (\mu_{k+1} - \mu_i)\, \mu_i. \end{aligned} \tag{5.99}$$

この (5.99) は定理 5.6 の欲しかった不等式 (5.36) である．□

第6章 ◇ 熱方程式と閉測地線の長さの集合

これまでは，リーマン多様体のラプラス作用素の個々の固有値がどのように振る舞うかを述べてきた．本章では，ラプラス作用素の固有値全体をリーマン多様体のスペクトルと呼び，それがリーマン多様体の幾何に与える影響について調べる．このような方法の一つに熱の伝搬を表す熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$ の基本解のトレースを調べる方法がある．これはコンパクト・リーマン多様体 (M, g) のラプラス作用素 Δ の固有値を重複度を込めて

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

と並べたとき，$t > 0$ の関数（熱方程式の基本解のトレースという）

$$Z(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \qquad (t > 0)$$

を調べるものである．これは，熱方程式の基本解をパラメトリックスと呼ばれるものを構成してなされる．これからスペクトルの情報からいくつかの幾何学的な情報が得られることがわかり，多くの仕事がなされた．本章では，

“一般的なコンパクト・リーマン多様体のスペクトルから閉測地線の長さの集合が決まる”

という コラン=ド=ヴェルディィエ (Colin de Verdière) の仕事を紹介する．

6.1 1次元サークル上の熱方程式

本章で述べる内容の概要を，長さが $K > 0$ の1次元サークル（トーラスともいう）$S_K := \mathbb{R}/(K\,\mathbb{Z})$ の場合に簡単に触れよう．S_K 上の C^∞ 関数全体の空間 $C^\infty(S_K)$ は

$$\{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, u(x+K) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

と自然に同一視される．$u, v \in C^\infty(S_K)$ に対して，内積を，

$$(u, v) := \int_0^K u(x)\, v(x)\, dx$$

と定義する．ただし dx は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度である．このとき

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{K}};\ \sqrt{\frac{2}{K}} \sin\left(\frac{2\pi m x}{K}\right),\ \sqrt{\frac{2}{K}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{K}\right) \,\middle|\, m = 1, 2, \ldots \right\} \tag{6.1}$$

は $C^\infty(S_K)$ の内積 $(\ ,\ )$ に関して完全正規直交系をなし，$u \in C^\infty(S_K)$ は絶対収束級数として，

$$u(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{K}} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \sqrt{\frac{2}{K}} \sin\left(\frac{2\pi m x}{K}\right) + b_m \sqrt{\frac{2}{K}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{K}\right) \right\} \tag{6.2}$$

と展開される．ここで係数 a_0, a_m, b_m $(m = 1, 2, \ldots)$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^K u(x)\, dx \\ a_m &:= \sqrt{\frac{2}{K}} \int_0^K \sin\left(\frac{2\pi m y}{K}\right) u(y)\, dy, \\ b_m &:= \sqrt{\frac{2}{K}} \int_0^K \cos\left(\frac{2\pi m y}{K}\right) u(y)\, dy. \end{aligned} \tag{6.3}$$

これが**フーリエ級数展開**であった．

完全正規直交系 (6.1) は同時に，ラプラス作用素 $\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数系にもなっており，その固有値は

$$\begin{cases} 0 & \text{重複度 } 1 \\ \dfrac{4\pi^2 m^2}{K^2} & \text{重複度 } 2 \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{6.4}$$

となっている．そこで，次の x, $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$ について絶対収束する3変数 (x, y, t) の関数 $F(x, y, t)$ を考える：

$$F(x,y,t) = \frac{1}{K} + \frac{2}{K}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2m^2}{K^2}t}\left\{\sin\left(\frac{2\pi mx}{K}\right)\sin\left(\frac{2\pi my}{K}\right) + \cos\left(\frac{2\pi mx}{K}\right)\cos\left(\frac{2\pi my}{K}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2m^2}{K^2}t}\cos\left(\frac{2\pi m}{K}(x-y)\right). \tag{6.5}$$

この級数 $F(x,y,t)$ は次の性質を満たす：

(1) $F(x,y,t)$ は次の熱方程式と呼ばれる偏微分方程式を満たす.

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,y,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,t) = 0. \tag{6.6}$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の周期 K をもつ連続関数 $u(x)$ に対して,

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_0^K F(x,y,t)\,u(y)\,dy = u(x). \tag{6.7}$$

実際，(1) は (6.5) を項別微分して示される．(2) は (6.2) を使う．

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_0^K F(x,y,t)\,u(y)\,dy$$
$$= a_0\frac{1}{\sqrt{K}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{a_m\sqrt{\frac{2}{K}}\sin\left(\frac{2\pi mx}{K}\right) + b_m\sqrt{\frac{2}{K}}\cos\left(\frac{2\pi mx}{K}\right)\right\}$$
$$= u(x).$$
□

上記 (1), (2) を満たす C^∞ 関数 $F(t,x,y)$ は**熱方程式の基本解**と呼ばれている．さらに，熱方程式の**基本解のトレース**と呼ばれる $t>0$ の関数

$$Z(t) := \int_0^K F(x,x,t)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2m^2}{K^2}t} \tag{6.8}$$

を考える．$Z(t)$ $(t>0)$ は絶対収束する級数である．

他方天下り的ではあるが，$t>0$, x, $y\in\mathbb{R}$ について絶対収束する級数

$$\widetilde{F}(x,y,t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y-Km)^2}{4t}} \tag{6.9}$$

を考える．この関数 $\widetilde{F}$ はその作り方より，任意の $t>0$ と $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に対して，

$$\widetilde{F}(x+K,y,t) = \widetilde{F}(x,y+K,t) = \widetilde{F}(x,y,t) \tag{6.10}$$

を満たし，さらに，上記の (1), (2) を満たす．

実際，(1) は $\widetilde{F}$ を項別微分して確かめられる．(2) は次のようにして示される．$\mathbb{R}$ 上の周期 K をもつ連続関数 $u(x)$ に対して，

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \int_0^K \widetilde{F}(x,y,t)\, u(y)\, dy \\ &= \int_0^K \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y-Km)^2}{4t}} \right) u(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, u(\sqrt{4t}\,\xi + x)\, d\xi \end{aligned} \tag{6.11}$$

最後の等式では，$-\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = \xi$ と変数変換した．ここで，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = 1$ なので，

$$u(t,x) - u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \left\{ u\big(\sqrt{4t}\,\xi + x\big) - u(x) \right\} d\xi \tag{6.12}$$

となる．$T>0$ を取り，(6.12) の右辺の積分を次のように3つの積分に分ける．

$$u(t,x) - u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{\infty} \right\} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{6.13}$$

関数 u は $\mathbb{R}$ 上有界であり，$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi < \infty$ であるので，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$T>0$ を十分大に取ると，

$$|I_1| < \varepsilon, \qquad |I_3| < \varepsilon \tag{6.14}$$

が成り立つようにできる．第2項の I_2 については，関数 u が周期 K の連続関数であるので，特に一様連続である．したがって，この $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を十分小に取れば (δ は ε のみに依存した小さい正数である), $|h|<\delta$ ならば，

$$|u(x+h)-u(x)|<\varepsilon \qquad (\forall\ x\in\mathbb{R}) \tag{6.15}$$

が成り立つ．あとで $t\downarrow 0$ とするのであるから，$\sqrt{4t}\,T\leq\delta$ が成り立つような十分小さな $t>0$ を取って考えると，

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-T}^{T} e^{-\xi^2}\left|u(\sqrt{4t}\,\xi+x)-u(x)\right|d\xi\\ &\leq \varepsilon\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-T}^{T} e^{-\xi^2}\,d\xi\\ &\leq \varepsilon\end{aligned} \tag{6.16}$$

となる．ゆえに，$|u(t,x)-u(x)|<3\varepsilon$ を得た．$\varepsilon>0$ は任意であったので，結局，$\lim_{t\downarrow 0}u(t,x)=u(x)$, すなわち (2) を得た． □

以上により，$\widetilde{F}(x,y,t)$ は x と y について周期 K の周期関数で，しかも，熱方程式の基本解であることが示された．われわれは後で，

"コンパクト連結なリーマン多様体上の熱方程式の基本解は唯一つである"

を示す（命題6.9）．以上のことから，恒等的に

$$F(x,y,t)=\widetilde{F}(x,y,t) \qquad (\forall\ t>0,\ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \tag{6.17}$$

となることを得た．ここで特に，そのトレースを考えると，

$$\int_0^K F(x,x,t)\,dx=\int_0^K \widetilde{F}(x,x,t)\,dx \tag{6.18}$$

となるので，(6.18) から，次の関係式を得る．

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2m^2}{K^2}t}=K\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{K^2m^2}{4t}}. \tag{6.19}$$

この $t > 0$ に関する恒等式 (6.19) が有名な**ポアッソンの和公式**に他ならない．

最後に，このポアッソンの和公式 (6.19) のもつ意味をここで考えてみよう．左辺の級数はラプラス作用素 Δ の固有値とその重複度の全体 (1 次元サークル S_K の**スペクトル**という)

$$\mathrm{Spec}(S_K) := \left\{ \frac{4\pi^2 m^2}{K^2} \middle| m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\} \tag{6.20}$$

に由来するものであった．右辺における 各項 $e^{-\frac{K^2 m^2}{4t}}$ の

$$\{K^2 m^2 | m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \tag{6.21}$$

は何を意味するのであろうか．その一つの解釈として，(6.21) は 1 次元サークル $S_K = \mathbb{R}/(K\,\mathbb{Z})$ の閉測地線の長さの自乗の集合（これを **length spectrum** という）$\mathrm{LSpec}(S_K)$ を表すとみる見方がある．すなわち，古典的なポワッソンの和公式は「1 次元サークル S_K 上のラプラス作用素のスペクトルという解析的な量と 1 次元サークル S_K の閉測地線の長さという微分幾何的な量とを結びつけ，橋渡しをしている」という見方である．この見方が，より一般的なリーマン多様体でも許され，コンパクト・リーマン多様体のスペクトルが閉測地線の長さの集合を決定するという定理を示したのが コラン＝ド＝ヴェルディィエの仕事である．

このためには，より詳しいモース理論と閉測地線に関する様々な結果が必要となる．まずそれらの準備を述べよう．

6.2　モース理論からの準備

6.2.1　ヒルベルト多様体内の非退化臨界部分多様体

本節では簡単にヒルベルト多様体上の C^∞ 実数値関数の臨界点と非退化臨界部分多様体のおさらいをしよう．実線形空間 H が**ヒルベルト空間**であるとは，

(1) H 上に内積 $\langle\,,\,\rangle$ をもつ，

(1-a)　$\langle ax + by, z\rangle = a\,\langle x, z\rangle + b\,\langle y, z\rangle$,　$(a,\,b \in \mathbb{R},\, x,\, y,\, z \in H)$

(1-b) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad (x,\, y \in H)$

(1-c) $\langle x, x\rangle \geq 0\ (x \in H)$. かつ等号成立は $x=0$ に限る.

(2) このとき $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\ (x \in H)$ により，H 上に**ノルム**を定義すると，

(2-a) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\ (x, y \in H)$

(2-b) $\|a\,x\| = |a|\,\|x\|\ (a \in \mathbb{R},\, x \in H)$

(2-c) $\|x\| \geq 0$, かつ等号成立は $x=0$ に限る.

(3)（完備性）H 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは，$n, m \to \infty$ のとき，$\|x_n - x_m\| \to 0$ を満たすときをいう．任意のコーシー列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する，すなわち，H 内の点 p が存在して，$\|x_n - p\| \to 0$（$n \to \infty$ のとき）となるとき，ノルム $\|\cdot\|$ に関して，**完備**という．

ヒルベルト空間 $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ が**可分**であるとは，すべての H の正規直交系は高々加算個の元からなるときをいう．

以下でわれわれは，常に可分なヒルベルト空間のみを扱う．H 内の開集合 U 上定義された実数値関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が U 上**微分可能**であるとは，U の任意の点 p に対して，有界線形写像 $T : H \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\frac{|f(p+x) - f(p) - T(x)|}{\|x\|} \to 0 \quad (x \to 0)$$

が成り立つときをいう．T を 関数 f の点 p での**微分 (全微分)** という．さらに，このとき，

$$\partial f_p(u) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left\{f(p + t\,u) - f(p)\right\} \qquad (u \in H)$$

を関数 f の点 p での $u \in H$ **方向微分**という．$\partial f_p : H \ni u \mapsto \partial f_p(u) \in \mathbb{R}$ は有界線形写像である．ここで $B(H)$ を H 上の実数値有界線形写像全体の空間とし，$S \in B(H)$ に対して，$\|S\| := \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|S(x)|}{\|x\|} < \infty$ によって S のノルム $\|S\|$ を定義する．$U \ni x \mapsto \partial f_x \in B(H)$ によって定義される U 上の $B(H)$ 値関数 $\partial f : U \to \mathbb{R}$ について，さらに $S = \partial(\partial f_p) \in B(H, B(H, \mathbb{R}))$ が存在して，

$$\frac{\|(\partial f)_{p+x} - \partial f_p - S(x)\|}{\|x\|} \to 0 \qquad (H \ni x \to 0)$$

を満たすとき，$\partial^2 f_p := \partial(\partial f)_p = S$ を f の**2階微分**という．こうして次々に高次の微分が定義され，U 上の C^∞ **関数**が定義される．

連結なハウスドルフ位相空間 Ω がヒルベルト空間 H をモデルとする C^∞ **ヒルベルト多様体**であるとは，Ω が次の条件を満たすときをいう：

(1) $\{U_\alpha;\ \alpha \in \Lambda\}$ は Ω の開被覆である．

(2) 各 U_α $(\alpha \in \Lambda)$ は H の開集合へ同相である．すなわち，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ が H で開集合である同相写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)\,(\subset H)$ が存在する．

(3) 任意の 2 つの $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ と (U_β, φ_β) $(\alpha, \beta \in \Lambda)$ を取り，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば，$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : H \supset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset H$ は H の開集合から別の H の開集合への C^∞ 同相写像である（Λ は (1), (2), (3) を満たすものの中で，極大なものであるとする）．

このとき，$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $(\alpha \in \Lambda)$ をヒルベルト多様体 Ω の座標近傍系という．

さらに，ヒルベルト多様体上の実数値関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が C^∞ **関数**であるとは，Ω の各座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ $(\alpha \in \Lambda)$ に対して，H 内の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上の実数値関数 $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1} : H \supset \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ が C^∞ となるときをいう．

$p \in \Omega$ とし，I を 0 を含む $\mathbb{R}$ 内の開区間とする．$c : I \to \Omega$ が点 p を通る C^∞ 曲線とは，$c(0) = p$, かつ，Ω における p を含む任意の座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ について，$\varphi_\alpha \circ c : I \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset H$ が C^∞ であるときをいう．p を通る 2 つの C^∞ 曲線 c_1, c_2 が**同値**であるとは，

$$(\varphi_\alpha \circ c_1)'(0) = (\varphi_\beta \circ c_2)'(0) \tag{6.22}$$

が成り立つときをいう．Ω 内の点 p を通る C^∞ 曲線の同値類の全体を $T_p\Omega$ と書く．$u \in T_p\Omega$ に対して，同値類 u に含まれる C^∞ 曲線 c を取り，

$$c'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c(t) := u \tag{6.23}$$

とおき，C^∞ 曲線 c の点 p での**接ベクトル**という．$T_p\Omega$ は p を通る Ω 内の C^∞ 曲線の点 p での接ベクトル全体であり，p における Ω の**接空間**という．接空間 $T_p\Omega$ には加法とスカラー倍を定義することができ，自然にヒルベルト空

間 H を同一視される．実際，$u \in H$ と p を含む座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して，p を通る Ω 内の C^∞ 曲線 c_α を $c_\alpha(t) := {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(0) + t\,u)$ $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ と定義すると，$(\varphi_\alpha \circ c_\alpha)(t) = \varphi_\alpha(0) + t\,u$ より，

$$(\varphi_\alpha \circ c_\alpha)'(0) = u \tag{6.24}$$

となる．この左辺は $T_p\Omega$ の元を定義し，右辺は H の元 u を与える．この同一視を $d\varphi_\alpha : T_p\Omega \xrightarrow{\cong} H$ と書くこととする．

ヒルベルト多様体 Ω 上の C^∞ **リーマン計量** g とは，Ω 上の各点 p の接空間 $T_p\Omega$ 上の内積 g_p, すなわち，

(i)　$g_p(a\,u + b\,v, w) = a\,g_p(u, w) + b\,g_p(v, w)$, $(a, b \in \mathbb{R},\ u, v, w \in T_p\Omega)$,

(ii)　$g_p(u, v) = g_p(v, u)$,　$(u, v \in T_p\Omega)$,

(iii)　$g_p(u, u) \geq 0$ $(u \in T_p\Omega)$, かつ等号成立は $u = 0$ に限る．

ここで，リーマン計量 g が C^∞ であるとは，次が成り立つときをいう：Ω 上の任意の点 p を含む任意の座標近傍系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ と，任意の $x \in U_\alpha$ に対して，

$$g_x(u, v) = \langle G^\alpha(x)(d\varphi_\alpha(u), d\varphi_\alpha(v)\rangle \quad (u, v \in T_x\Omega) \tag{6.25}$$

と表す．ここで $d\varphi_\alpha : T_x\Omega \xrightarrow{\cong} H$ であり，$G_\alpha(x) : H \to H$ はヒルベルト空間 H から自分自身への有界線形写像である．このとき，$U_\alpha \ni x \mapsto G_\alpha(x) \in B(H, H)$ が C^∞ であることである．

可分なヒルベルト空間 H をモデルとする C^∞ ヒルベルト多様体 Ω 上には，C^∞ リーマン計量 g が存在することが知られている．以下では，そのようなリーマン計量 g を1つ取っておき，$g_p = \langle\, ,\, \rangle_p$, また，$|u|_p = \langle u, u\rangle_p$ $(u \in T_p\Omega)$ などと略記する．

さて，Ω 上の実数値 C^∞ 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ と各点 $p \in \Omega$ において，線形写像 $df_p : T_p\Omega \to \mathbb{R}$ が

$$df_p(u) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)), \tag{6.26}$$

によって定義される．ここで $c(t)$ は $t = 0$ のとき点 p を通る C^∞ 曲線で，$u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c(t)$ を満たすものとする．特に，$df_p(u) = 0$ $(\forall\, u \in T_p\Omega)$ となると

き，点 p を f の**臨界点**という．

点 $p \in \Omega$ が C^∞ 関数 f の臨界点であるとき，**ヘッシアン**と呼ばれる対称な双線形写像

$$\mathrm{Hess}\, f_p : T_p\Omega \times T_p\Omega \ni (u, v) \mapsto \mathrm{Hess}\, f_p(u, v) \in \mathbb{R} \tag{6.27}$$

が次のように定義される．

$$\mathrm{Hess}\, f_p(u, v) := \left. \frac{\partial^2 f(\alpha(s,t))}{\partial s \partial t} \right|_{(s,t)=(0,0)} \tag{6.28}$$

ここで α は $\mathbb{R}^2$ から Ω への C^∞ 写像で，

$$\alpha(0,0) = p, \quad \left.\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,0)} = u, \quad \left.\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)} = v \tag{6.29}$$

を満たすものとする．この定義は (6.29) を満たす α の取り方に依らないことがわかる．

Ω の閉部分集合 W が Ω の**閉部分多様体**であるとは，Ω の座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ に対して，$\{(W \cap U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ が W の座標近傍系を与えるときをいう．Ω の連結な閉部分多様体 W が Ω 上の C^∞ 関数 f の**非退化臨界部分多様体**であるとは，以下の (1), (2), (3) を満たすときをいう：

(1) W の各点 w は f の臨界点である．

(2) W の各点 w において，次の性質を満たす $T_w\Omega$ の閉部分空間 N_w が存在する：

$$T_w\Omega = T_wW \oplus N_w \quad (\text{直和}). \tag{6.30}$$

(3) w での f のヘッシアンの N_w への制限 $\mathrm{Hess}\, f_w\big|_{N_w}$ が非退化である．すなわち，

$$\mathrm{Hess}\, f_w(u, v) = g_w(Au, v), \quad (u,\, v \in N_w) \tag{6.31}$$

により対称有界作用素 $A : N_w \to N_w$ が定義され，上への同型を与える．

この非退化部分多様体の定義は (2) における T_wW の補空間 N_w の取り方に依らない．f の非退化臨界部分多様体 W に対して，W の**指標** j_W を

$$j_W := \sup\{\dim F |\, F \subset N_w, \quad (\mathrm{Hess}\, f_w|_{W_w}) \text{ は } F \text{ 上負定値}\} \tag{6.32}$$

と定義する．指標 j_W は $w \in W$ と N_w の取り方に依らない．

6.2.2 閉測地線

前節の話を，コンパクト・リーマン多様体内の閉曲線のなす空間に適用する．

(M, g) を n 次元コンパクト・リーマン多様体とする．写像 $\gamma\colon [0,1] \to M$ が**絶対連続**であるとは，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さな $\delta > 0$ を選ぶと，閉区間 $[0,1]$ 内の互いに重なり合わない任意個の閉区間 $[t_k{}', t_k]$ $(k = 1, \ldots, d)$ が $\sum_{k=1}^{d}(t_k - t_k{}') < \delta$ を満たすならば，

$$\sum_{k=1}^{d} |\, \gamma(t_k) - \gamma(t_k{}')| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう．このとき，$\gamma\colon [0,1] \to M$ は連続で，$[0,1]$ 内のほとんど至る所で可微分である．

$\gamma\colon [0,1] \to M$ が H^1**-曲線**であるとは，写像 $\gamma\colon [0,1] \to M$ が絶対連続で，$\int_0^1 |\dot\gamma(t)|^2\, dt < \infty$ を満たすときをいう．

次に H^1 曲線 $\gamma\colon [0,1] \to M$ について，γ に沿ったベクトル場 $X\colon [0,1] \ni t \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ が H^1**-ベクトル場**であるとは，X が絶対連続で，$\int_0^1 \langle X'(t), X'(t) \rangle\, dt < \infty$ のときをいう．ここで $X'(t) := (\nabla_{\dot\gamma} X) \in T_{\gamma(t)}M$ であり，また，写像 $[0,1] \ni t \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ が絶対連続とは，$[0,1]$ 上の関数 $[0,1] \ni t \mapsto |X(t)|$ が絶対連続，すなわち，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さな $\delta > 0$ を選ぶと，閉区間 $[0,1]$ 内の互いに重なり合わない任意個の閉区間 $[t_k{}', t_k]$ $(k = 1, \ldots, d)$ が $\sum_{k=1}^{d}(t_k - t_k{}') < \delta$ を満たすならば，

$$\sum_{k=1}^{d} \big|\, |X(t_k)| - |X(t_k{}')| \,\big| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう．このとき，γ に沿ったベクトル場 X は連続かつほとんど至る所で可微分である．

定義 6.1　(1) $\Omega(M)$ を H^1 曲線 $\gamma\colon[0,1]\to M$ であって，$\gamma(0)=\gamma(1)$ を満たすもの全体とする．

(2) 各 $\gamma\in\Omega(M)$ に対して，$T_\gamma\Omega(M)$ を γ に沿った H^1-ベクトル場 X で，$X(0)=X(1)$ を満たすもの全体とする．

($T_\gamma\Omega(M)$ を多様体 $\Omega(M)$ における点 γ の "接空間" という)．

$\Omega(M)$ 上に次のような**距離**を導入する：任意の 2 つの H^1-曲線 $\gamma,\gamma'\in\Omega(M)$ に対して，

$$d(\gamma,\gamma'):=\max_{t\in[0,1]}d(\gamma(t),\gamma'(t))+\left[\int_0^1|\dot\gamma(t)-\dot\gamma'(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6.33}$$

ここで (M,g) 内の 2 点 p,q 間の距離を $d(p,q)$ で表し，γ の $t\in[0,1]$ における接ベクトルを $\dot\gamma(t)$ で表す．このとき，距離 d により，$\Omega(M)$ 上に位相が定義され，$\Omega(M)$ はハウスドルフ空間となる．

次に，$\Omega(M)$ 上にリーマン計量を与える．$\Omega(M)$ の各点 $\gamma\in\Omega(M)$ における "接空間 "$T_\gamma\Omega(M)$ 上の内積 $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_\gamma$ を

$$\langle\!\langle X,Y\rangle\!\rangle_\gamma:=\int_0^1\left\{\langle X(t),Y(t)\rangle+\langle X'(t),Y'(t)\rangle\right\}dt,\quad (X,Y\in T_\gamma\Omega(M)) \tag{6.34}$$

によって定義する．このとき，$\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_\gamma$ によって $T_\gamma\Omega(M)$ はヒルベルト空間で，$\Omega(M)$ は $T_\gamma\Omega(M)$ を $\Omega(M)$ の γ における接空間とする C^∞ ヒルベルト多様体となり，$\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle$ は $\Omega(M)$ 上の C^∞ リーマン計量を与える．

つぎに $\Omega(M)$ 上の関数として，**エネルギー関数** $E\colon\Omega(M)\to\mathbb{R}$ を

$$E(\gamma):=\int_0^1\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle\,dt\qquad(\gamma\in\Omega(M)) \tag{6.35}$$

によって定義する．このとき次のことが成り立つ：

(a) エネルギー関数 E は $\Omega(M)$ 上の C^∞ 関数である．

(b) (**第 1 変分公式**)　任意の $\gamma\in\Omega(M)$ に対して，γ の $\gamma_0=\gamma$ であるような任意の変形 $\gamma_s\in\Omega(M)$ $(-\varepsilon<s<\varepsilon)$ に対して，$V(t):=$

$\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s(t) \in T_{\gamma(t)}M\ (t \in [0,1])$ とおくと，

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(\gamma_s) = -\int_0^1 \langle V(t), \tau(\gamma)(t)\rangle\, dt. \tag{6.36}$$

ここに $\tau(\gamma)(t) = (\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)_{\gamma(t)}\ (t \in [0,1])$ である．γ が E の**臨界点**，すなわち，$\gamma_0 = \gamma$ であるような任意の γ の変形 $\gamma_s\ (-\varepsilon < s < \varepsilon)$ に対して，

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(\gamma_s) = 0 \tag{6.37}$$

である必要十分条件は

$$\tau(\gamma)(t) = (\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)_{\gamma(t)} = 0 \qquad (\forall\ t \in [0,1]) \tag{6.38}$$

である．このような (6.38) を満たす $\gamma \in \Omega(M)$ で，$\gamma(0) = \gamma(1)$ かつ $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(1)$ を満たす C^1 曲線を**閉測地線**という．

上記より，$\mathrm{Geo}(M,g)$ を (M,g) の弧長に比例した係数によってパラメータ化された**閉測地線全体**とすると，

$$\begin{cases} \gamma \in \Omega(M) \text{ がエネルギー } E \text{ の臨界点となる必要十分条件は} \\ \gamma \in \mathrm{Geo}(M,g) \text{ となることである．さらにこのとき，} \\ \qquad\qquad E(\gamma) = L(\gamma)^2 \\ \text{が成り立つ．} \end{cases}$$

ここで $\gamma \in \Omega(M)$ に対して，

$$L(\gamma) := \int_0^1 \langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{\frac{1}{2}}\, dt \tag{6.39}$$

であり，H^1-曲線 γ の**長さ**と呼ばれる．

(c)（**第2変分公式**）　$\gamma \in \Omega(M)$ が E の臨界点とする．このとき，E の γ でのヘッシアン $\mathrm{Hess}(E)_\gamma$ は次のように与えられる．

$$\frac{1}{2}\mathrm{Hess}(E)_\gamma(X,Y) := \int_0^1 \left\{ \langle X'(t), Y'(t)\rangle\, dt - \langle R(X(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t), Y(t)\rangle \right\} dt$$

$$= \left[\langle X'(t), Y(t) \rangle \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \langle X''(t) + R(X(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t), Y(t) \rangle \, dt. \quad (6.40)$$

ここで $X, Y \in T_\gamma \Omega(M)$ はそれぞれ γ に沿った C^∞ ベクトル場で, $\langle X(t), \dot\gamma(t) \rangle = \langle Y(t), \dot\gamma(t) \rangle = 0 \ (\forall\, t \in [0,1])$ を満たすものである. また, $X''(t) = (\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} X)_{\gamma(t)}$ であり, $R(U,V)W \ (U, V, W \in \mathfrak{X}(M))$ は (M, g) の曲率テンソルとする.

定義 6.2

$$\mathcal{L} := \{ L(\gamma) \,|\, \gamma \in \mathrm{Geo}(M, g) \} \cup \{0\} \quad (6.41)$$

とおく. すなわち, $\mathcal{L}$ は**閉測地線の長さの集合**で, 1 点も自明な測地線（点曲線）と考えてその長さ 0 も考慮に入れたものとする.

(1) $L \in \mathcal{L}$ が**非退化**であるとは, 集合 $\{ \gamma \in \mathrm{Geo}(M, g) \,|\, E(\gamma) = L^2 \}$ が有限個の連結成分の和集合となり（それらを W_i とする), 各 W_i は $\Omega(M)$ のコンパクト非退化臨界部分多様体となるときをいう.

(2) このような W_i に対して, 次の 2 つの数が定義される：

W_i の**指標** j_{W_i} は (6.32) で定義したものとする.

W_i の**退化次数** n_{W_i} は次のように定義する：

$$n_{W_i} := \begin{cases} \dim(W_i) - 1 & (L \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dim(W_i) & (L = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6.42)$$

これらの定義は次のようにして別に定義されている閉測地線の指標と退化次数と一致する.

実際, $L \neq 0$ のとき, $\{ \gamma \in \mathrm{Geo}(M, g) \,|\, E(\gamma) = L^2 \}$ の連結成分 W_i の退化次数については, $\gamma \in W_i$, $X \in T_\gamma \Omega(M)$ とすると, $X \in T_\gamma W_i$ であることは次が成り立つことと同値である：

$$X_{\gamma(t)} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma_s(t), \quad (6.43)$$

ここで $\gamma_s \in W_i \ (\gamma_0 = \gamma)$ である. さらに, $\gamma_s \in W_i$ であることは, $\gamma_s \in \mathrm{Geo}(M, g)$ かつ $E(\gamma_s) = L^2$ である. したがって, ヤコビ場の定義（1.7 節）

より，

$$X \in T_\gamma W_i \iff X \text{ が } \gamma \text{ に沿ったヤコビ場で，} X(0) = X(1) \text{ である} \tag{6.44}$$

となる．したがって，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} n_{W_i} &:= \dim(W_i) - 1 \\ &= \dim\{X \mid X \text{ は } \gamma \text{ に沿ったヤコビ場で，} \\ &\qquad X(0) = X(1) = 0 \text{ を満たす}\} \end{aligned} \tag{6.45}$$

となる．(6.45) の右辺は点 $\gamma(0)$ の γ に沿った共役点としての点 $\gamma(1)$ の重複度，測地線 γ の重複度と呼ばれていた．

W_i の指標 j_{W_i} については，(6.32) より，

$$j_{W_i} := W_i \text{ の指標} = \mathrm{Hess}(E)_\gamma\big|_{N_\gamma} \text{ の指標} \tag{6.46}$$

であった．ここで $T_\gamma\Omega(M) = T_\gamma W_i \oplus N_\gamma$（直和分解）である．

さらに，$X \in T_\gamma\Omega(M)$ に対して，$X^\perp := X - \frac{\langle X,\dot\gamma\rangle}{|\dot\gamma|}\dot\gamma$ がヤコビ場である必要十分条件は

$$\mathrm{Hess}(E)_\gamma(X,Y) = 0 \quad (\forall\, Y \in T_\gamma\Omega(M)) \tag{6.47}$$

である．このとき指標の定義と指標定理 (例えば [47], p.132 定理 3.2 を見よ．但し同書では「指標」は「指数」と呼ばれている) により，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} j_{W_i} &:= \mathrm{Hess}(E)_\gamma \text{ が負の定符号であるような } T_\gamma\Omega(M) \\ &\qquad \text{の部分空間の最大次元} \\ &= \text{点 } \gamma(0) \text{ の } \gamma \text{ に沿った共役点 } \gamma(t)\ (0 < t < 1) \text{ を，} \\ &\qquad \text{重複度を込めて数え上げた個数.} \end{aligned} \tag{6.48}$$

$L = 0$ のときは

$$\{\gamma \in \mathrm{Geo}(M) \mid E(\gamma) = 0\} = M \text{ の点曲線} = M.$$

ゆえに，$L=0$ は非退化で，指標 $=0$, かつ 退化次数 $=\dim(M)$ となる．

次に後で用いる重要な定義をしよう．

定義 6.3　(1) コンパクト・リーマン多様体 (M,g) が**性質** $(\mathbf{P}_1)$ **をもつ**とは，任意の $L\in\mathcal{L}$ が非退化のときをいう．

(2) (M,g) が**性質** $(\mathbf{P}_2)$ **をもつ**とは，性質 (P_1) をもち，さらに，任意の $L\in\mathcal{L}\backslash\{0\}$ に対して，

$$\{\gamma\in\mathrm{Geo}(M,g)|\, E(\gamma)=L^2\}=W_+\cup W_- \tag{6.49}$$

となるときをいう．ここで W_+ と W_- は

$$W_+=\{t\mapsto\gamma(t+a)|\, a\in[0,1)\}, \tag{6.50}$$

$$W_-=\{t\mapsto\gamma(a-t)|\, a\in[0,1)\} \tag{6.51}$$

であり，さらに W_+ と W_- がともに $\Omega(M)$ の退化次数 0 の非退化部分多様体となるときをいう．

注意 6.4　(1) (M,g) が性質 (P_1) をもてば，測地線の長さの集合 $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}$ で離散集合となる．

(2) (M,g) が性質 (P_2) をもてば，(M,g) のすべての測地線は孤立して，それらの長さは相異なる．各 $L\in\mathcal{L}\backslash\{0\}$ に属する 2 つの臨界部分多様体はその測地線 γ のパラメータをずらしたものと，逆向きにパラメータを取ったもののみで，それらの指標は一致している．それを j_L と書くこととする．

(3) コンパクトな負曲率リーマン多様体は性質 (P_2) をもつことが知られている．

(4) 性質 (P_1) と (P_2) はどちらも "一般的な" 性質である．すなわち，任意のリーマン計量をすこし凸凹すれば，性質 (P_1), (P_2) を満たすようにできる．

6.2.3　$\Omega(M)$ への有限次元近似

n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M,g) の H^1 閉曲線を d 個の区分的に測地線よりなる閉曲線で近似することを考える．

まずそのためいくつかの準備をする．

$I=(0,1)$ 開区間，$d=2,3,\ldots$ に対して，$(d-1)$ 次元単体 X_d を

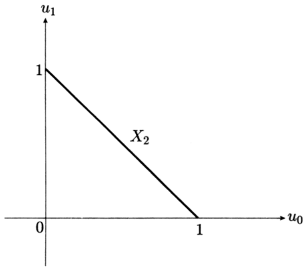


図 6.1　1次元単体 X_2

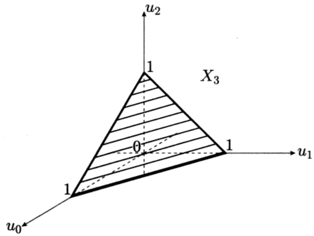


図 6.2　2次元単体 X_3

$$X_d := \left\{ U = (u_0, u_1, \ldots, u_{d-1}) \in \underbrace{I \times \cdots \times I}_{d} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{d-1} u_i = 1 \right\}$$

とする．$M^d := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{d}$ とし，

$$M_0^d := \left\{ (x_i) := (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \in M^d \,\middle|\, \overline{x_i x_{i+1}} < \mathrm{inj}\ (i = 0, 1, \ldots, d-1) \right.$$
$$\left. \text{ただし}\ x_d = x_0 \right\}$$

ここで $\overline{pq}$ は2点 p, q 間の距離を表し, inj は (M, g) の**単射半径**, すなわち, 各点 $x \in M$ における指数写像 $\mathrm{Exp}_x : T_xM \to M$ が $B_x(\rho) := \{v \in T_xM \mid |v| < \rho\}$ 上で微分同相となるような $\rho > 0$ の上限のことである．

各 $U \in X_d$ に対して，埋め込み $j_U : M_0^d \to \Omega(M)$ を次のように定義する：$\gamma := j_U(x_0, \ldots, x_{d-1})$ は $x_0, \ldots, x_{d-1}$ を通る区分的に測地線より成る閉曲線で, 次のようなものとする．$t_0 = 0, t_1 = u_0, \ldots, t_i = u_0 + \cdots + u_{i-1}, \ldots, t_d = 1$ とおくとき，$\gamma_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ は x_i と x_{i+1} とを結ぶ最短測地線で弧長に比例して係数づけられているものである．

さらに，M_0^d 上の実数値関数を $E_U := E \circ j_U$ とし，$M_0^d \times X_d$ 上の実数値関数 $\widetilde{E}$ を $\widetilde{E}((x_i), U) := E_U((x_i))$ とおき，

$$h := j_U \times \mathrm{Id}_{X_d} : M_0^d \times X_d \ni ((x_i), U) \mapsto (j_U(x_i), U) \in \Omega(M) \times X_d$$

と定義する．ここで 関数 E は (6.35) で定義されたエネルギー関数である．

次の2つの命題は C^∞ 関数 E_U と $\widetilde{E}$ の臨界点の特徴付けを与える．

命題 6.5　次式が成り立つ：

$$E_U((x_i)) = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}. \tag{6.52}$$

M_0^d 上の C^∞ 関数 E_U の臨界点 $(x_0, \dots, x_{d-1})$ は $j_U(x_0, \dots, x_{d-1})$ が閉測地線となるものである，すなわち，

- $$\lim_{t \downarrow 0} \dot{\gamma}\big|_{[t_{i-1}, t_i]}(t_i - t) = \lim_{t \downarrow 0} \dot{\gamma}\big|_{[t_i, t_{i+1}]}(t_i + t) \tag{6.53}$$
  $(\forall\, i = 0, \dots, d-1)$，　かつ
- $$\frac{\overline{x_0 x_1}}{u_0} = \frac{\overline{x_1 x_2}}{u_1} = \cdots = \frac{\overline{x_{d-1} x_0}}{u_{d-1}} \tag{6.54}$$

で特徴づけられる．

証明　実際，(6.52) は次のように計算される．

$$E_U((x_i)) = \sum_{i=0}^{d-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}. \tag{6.55}$$

この第1変分を計算する．M_0^d の局所座標系を (x_i^j) $(i = 0, \dots, d-1;\ j = 1, \dots, n)$ とし，$\overline{x_i x_{i+1}}$ で x_{i+1} を固定点とし，x_i の関数とみて計算する．長さの第1変分公式より，

$$\frac{\partial}{\partial x_i^j} \overline{x_i x_{i+1}} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i^j} \right)_{x_i}, \frac{\dot{\gamma}_i(t_i)}{|\dot{\gamma}_i|} \right\rangle. \tag{6.56}$$

今度は x_{i-1} を固定点，x_i の関数とみて計算する．同様に，

$$\frac{\partial}{\partial x_i^j} \overline{x_{i-1} x_i} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i^j} \right)_{x_i}, -\frac{\dot{\gamma}_{i-1}(t_i)}{|\dot{\gamma}_{i-1}|} \right\rangle. \tag{6.57}$$

したがって，任意の $i = 0, \dots, d-1;\ j = 1, \dots, n$ に対して，

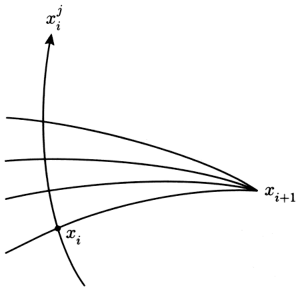


図 6.3　$\overline{x_i x_{i+1}}$ の変分

$$0 = \frac{\partial E_U}{\partial x_i^j} = 2\frac{\overline{x_i x_{i+1}}}{u_i}\frac{\partial}{\partial x_i^j}\overline{x_i x_{i+1}} + 2\frac{\overline{x_{i-1} x_i}}{u_{i-1}}\frac{\partial}{\partial x_i^j}\overline{x_{i-1} x_i}$$
$$= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i^j}\right)_{x_i}, 2\frac{\overline{x_i x_{i+1}}}{u_i}\frac{\dot\gamma_i(t_i)}{|\dot\gamma_i|} - 2\frac{\overline{x_{i-1} x_i}}{u_{i-1}}\frac{\dot\gamma_{i-1}(t_i)}{|\dot\gamma_{i-1}|}\right\rangle \tag{6.58}$$

となるための必要十分条件は

$$\frac{\overline{x_i x_{i+1}}}{u_i}\frac{\dot\gamma_i(t_i)}{|\dot\gamma_i|} = \frac{\overline{x_{i-1} x_i}}{u_{i-1}}\frac{\dot\gamma_{i-1}(t_i)}{|\dot\gamma_{i-1}|} \quad (i = 0, \ldots, d-1). \tag{6.59}$$

(6.59) と (6.53) より，(6.54) を得る．□

命題 6.6　(1) $d = 2, 3, \ldots$ に対して，C^∞ 写像 $h: M_0^d \times X_d \to \Omega(M) \times X_d$ は埋め込みであるが，更に $\widetilde{E} \in C^\infty(M_0^d \times X_d)$ の臨界点の集合と集合

$$\left\{(\gamma, U) \,\middle|\, \gamma \text{ は長さ } L \text{ が } L < \frac{\mathrm{inj}}{\max(u_i)} \text{ を満たす閉測地線}\right\} \tag{6.60}$$

との間の1対1対応を与える．

(2) W を $E = L^2 < (d\,\mathrm{inj})^2$ $(d = 2, 3, \ldots)$ となる $\Omega(M)$ の非退化臨界部分多様体とする．このとき，$h^{-1}(W \times X_d)$ は $\widetilde{E}$ に対する $M_0^d \times X_d$ の非退化臨界部分多様体であり，その次元は $n_W + d$ で，指標は W の指標 j_W に一致する．

証明 (1) の証明. $\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial x_i^j}$ は命題 6.5 で計算した. 一方, $u_{d-1} = 1 - u_0 - u_1 - \cdots - u_{d-2}$ なので,

$$\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial u_i} = -\frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{{u_i}^2} + \frac{\overline{x_{d-1} x_d}^2}{{u_{d-1}}^2}. \tag{6.61}$$

したがって, $\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial u_i} = 0$ $(i = 0, \ldots, d-1)$ となる必要十分条件は

$$\frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{{u_i}^2} = \frac{\overline{x_{d-1} x_d}^2}{{u_{d-1}}^2} \qquad (i = 0, \ldots, d-1). \tag{6.62}$$

ゆえに命題 6.5 より, $\widetilde{E}$ の臨界点の集合は集合

$$\left\{ ((x_i), U) \,\middle|\, j_U((x_i)) \text{ は閉測地線で, } \frac{\overline{x_0 x_1}}{u_0} = \cdots = \frac{\overline{x_{d-1} x_0}}{u_{d-1}} \text{ を満たす} \right\} \tag{6.63}$$

と一致する. このときの $\widetilde{E}$ の値は

$$E \circ j_U((x_i)) = j_U((x_i)) \text{ の長さの自乗} = \left(\sum_{i=0}^{d-1} \overline{x_i x_{i+1}} \right)^2. \tag{6.64}$$

ここで (6.64) の左辺は (6.55) と (6.62) より,

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i} = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\overline{x_j x_{j+1}}}{u_j} \overline{x_i x_{i+1}} = \frac{\overline{x_j x_{j+1}}}{u_j} \left(\sum_{i=0}^{d-1} \overline{x_i x_{i+1}} \right). \tag{6.65}$$

したがって, (6.64) と (6.65) より, $j_U((x_i))$ の長さは $\frac{\overline{x_j x_{j+1}}}{u_j}$ $\left(< \frac{\mathrm{inj}}{\max(u_i)}\right)$ となる.

(2) $((x_i), U) \in h^{-1}(W \times X_d)$, すなわち, $h((x_i), U) = (j_U((x_i)), U) \in W \times X_d$ とする. このとき $j_U((x_i))$ は閉測地線で, したがってまた,

$$L = \frac{\overline{x_0 x_1}}{u_0} = \cdots = \frac{\overline{x_{d-1} x_d}}{u_{d-1}} \quad (x_d = x_0)$$

であるので, $((x_i), U)$ は $\widetilde{E}$ の臨界値が L^2 の臨界点である. 次に,

h_* : h の $((x_i), U) \in h^{-1}(W \times X_d)$ での微分写像

$p_1 : \Omega(M) \times X_d \to \Omega(M)$ を自然な射影

とする．このとき，

$$\mathrm{Im}(p_{1*} \circ h_*)_{((x_i),U)} = T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1}), \quad \gamma := j_U((x_i)), \tag{6.66}$$

となる．ここで (6.66) の右辺は

$$T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1}) := \{Y \,|\, Y \text{ は } \gamma \text{ に沿ったベクトル場で，} Y|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ が } \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ に沿ったヤコビ場となるもの}\} \tag{6.67}$$

である．また，$T_\gamma \Omega(M)$ は

$$T_\gamma \Omega(M) = T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1}) + T', \tag{6.68}$$

と分解し, (6.68) は $\mathrm{Hess}(E)_\gamma$ に関する直交分解で, $\mathrm{Hess}(E)_\gamma$ は T' 上で正定値である (証明は [40] p.93，補助定理 15.3 を見よ). $T_\gamma W \subset T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1})$ であるので，$T_\gamma W^\perp \subset T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1})$ を $\mathrm{Hess}(E)_\gamma$ について直交分解

$$T_\gamma \Omega(u_0, \ldots, u_{d-1}) = T_\gamma W + T_\gamma W^\perp$$

となるように取り，$N_\gamma := T_\gamma W^\perp + T'$ とおく．このとき，

$$T_{((x_i),U)}(M_0^d \times X_d) = T_{((x_i),U)} h^{-1}(W \times X_d) + {h_*}^{-1}(\mathrm{Im}(h_*) \cap (N_\gamma \times \{0\}))$$

なので，次を得る．

$$\begin{aligned} h^{-1}(W \times X_d) \text{ の指標} &= \mathrm{Hess}(\widetilde{E})_{((x_i),U)}\big|_{{h_*}^{-1}(\mathrm{Im}(h_*) \cap (N_\gamma \times \{0\}))} \text{ の指標} \\ &= \mathrm{Hess}(\widetilde{E})_{((x_i),U)}\big|_{{h_*}^{-1}(T_\gamma W^\perp \times \{0\})} \text{ の指標} \\ &= \mathrm{Hess}(E)_\gamma\big|_{T_\gamma W^\perp} \text{ の指標} \\ &= \mathrm{Hess}(E)_\gamma\big|_{N_\gamma} \text{ の指標} \\ &= W \text{ の指標} = j_W. \end{aligned} \tag{6.69}$$

また,

$$\begin{aligned}\dim(h^{-1}(W \times X_d)) &= \dim(W) + \dim(X_d)\\ &= \dim(W) + d - 1\\ &= n_W + d.\end{aligned} \tag{6.70}$$

(2) を得た. □

6.3　複素熱方程式の基本解

本節では n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M, g) 上の熱方程式の基本解のパラメトリックスの構成について述べ, 基本解のトレースから (M, g) の幾何的量が決まる話を述べる. 以下, $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ とおく.

定義 6.7　関数 $F: M \times M \times \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が**複素熱方程式の基本解**であるとは,

(1) 関数 $F(p, q, z)$ は 3 変数 (p, q, z) について C^0 級, 最初の 2 つ p, q について C^2 級, 3 番目の z について正則であり, かつ

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \Delta_2 F = 0 \tag{6.71}$$

ここで $\Delta_2 F$ は $F(p, q, z)$ の 2 番目の変数 q に関して, (非負) ラプラス作用素 Δ を作用させていることを表す.

(2) 任意の M 上の $\mathbb{C}$-値連続関数 f と任意の $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対して,

$$\lim_{|z| \to 0,\ |\arg(z)| \leq |\alpha|} \int_M F(p, q, z)\, f(q)\, v_g(q) = f(p) \quad (\forall\, p \in M) \tag{6.72}$$

が成り立つときをいう.

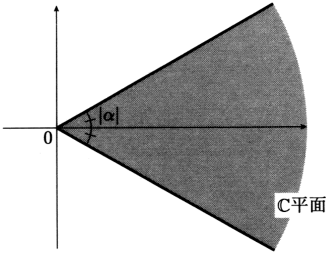


図 6.4　複素平面領域

注意 6.8　関数 $F(p,q,z)$ の変数 $z\in\mathbb{C}^+$ を $\{t\in\mathbb{R}|\,t>0\}$ に制限することにより，(実) 熱方程式の基本解が得られる．複素熱方程式の基本解は，実熱方程式の基本解を解析接続したものに他ならない．

記号表　本節において以下で用いる記号をここにまとめておく．

$C^0(M)^{\mathbb{C}}$	M 上 ℂ-値連続関数全体のなす線形空間
$C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$	M 上 ℂ-値 C^∞ 関数全体のなす線形空間
$C^0(M)$	M 上実数値連続関数全体のなす線形空間
$C^\infty(M)$	M 上実数値 C^∞ 関数全体のなす線形空間

$C^0(M)^{\mathbb{C}}$ 上のエルミート内積 (,) を

$$(f,h):=\int_M f\,\overline{h}\,v_g,\qquad (f,\,h\in C^0(M)^{\mathbb{C}})$$

によって定義し，$L^2(M)^{\mathbb{C}}$ を，$C^0(M)^{\mathbb{C}}$ のエルミート内積 (,) による完備化とし，M 上の L^2 関数全体のなす空間とする．ラプラス作用素 Δ を $C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ 上に，

$$\Delta(f_1+\sqrt{-1}\,f_2)=\Delta f_1+\sqrt{-1}\,\Delta f_2\quad (f_1,f_2\in C^\infty(M))$$

と拡張する．このとき，$\Delta\,C^\infty(M)^{\mathbb{C}}\subset C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ であり，かつ

$$(\Delta f,h)=(f,\Delta h),\quad (f,\,h\in C^\infty(M)^{\mathbb{C}})$$

を満たす．したがって，ラプラス作用素 Δ の $C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ での固有値はすべて

実数であり，固有関数を $C^\infty(M)$ の中から選ぶことができ，また，互いに相異なる固有値に属する固有関数はエルミート内積 (,) に関して互いに直交する．

更に，Δ の $C^\infty(M)$ での固有値を重複度を込めて

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq \cdots$$

と並べ，固有値 λ_i の固有関数 $u_i \in C^\infty(M)$ により $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ が $C^0(M)$ の完全正規直交系となるようにできる．このとき，$\{u_i\}_{i=1}^\infty$ は $C^0(M)^{\mathbb{C}}$ での完全正規直交系でもあるので，Δ の $C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ でのスペクトルと $C^\infty(M)$ でのスペクトルとは同一である．

さて複素熱方程式の基本的な事柄から始めよう．

命題 6.9（**基本解の一意性**）　複素熱方程式の基本解 $F(p,q,z)$ が存在すると仮定すると，$F(p,q,z)$ は一意的で，次のように書ける．

$$F(p,q,z) = \sum_{i=1}^\infty e^{-\lambda_i z}\, u_i(p)\, u_i(q), \tag{6.73}$$

ここで (6.73) の右辺の級数は $z \in \mathbb{C}^+$, p, $q \in M$ で収束する．

証明（第 1 段）$p \in M$, $z \in \mathbb{C}^+$ を任意に取って固定する．$f(p,\bullet,z)$ を $M \ni q \mapsto F(p,q,z)$ なる関数とすると，これは C^0 級なので，

$$F(p,\bullet,z) = \sum_{i=1}^\infty f_i(p,z)\, u_i \quad (L^2\text{-収束}), \tag{6.74}$$

ここで

$$f_i(p,z) := \int_M F(p,q,z)\, u_i(q)\, v_g(q). \tag{6.75}$$

と表せる ($\{u_i\}_{i=1}^\infty$ は $L^2(M)^{\mathbb{C}}$ の完全正規直交基底なので，これに関するフーリエ級数展開，固有関数展開定理)．$F(p,q,z)$ は z について正則，M はコンパクトであるので，(6.75) より，各 $f_i(p,z)$ も z について正則で，次が成り立つ．

$$\frac{\partial f_i(p,z)}{\partial z} = \int_M \frac{\partial F(p,q,z)}{\partial z}\, u_i(q)\, v_g(q)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\Delta_2 F, u_i) \\
&= -(F, \Delta u_i) \\
&= -\lambda_i\,(F, u_i) \\
&= -\lambda_i\, f_i(p,z). \qquad (6.76)
\end{aligned}
$$

よって，$f_i(p,z) = k_i(p)\,e^{-\lambda_i z}$ と表せる．ここで $k_i(p)$ については，(6.72) より，

$$
k_i(p) = \lim_{|z|\to 0,\ |\arg(z)|\le|\alpha|} f_i(p,z) = u_i(p) \qquad (6.77)
$$

となるので，$f_i(p,z) = e^{-\lambda_i z}\,u_i(p)$ となる．

（第2段）第1段より，各 $p \in M$ と z についてそれらを固定すると，

$$
F(p,q,z) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z}\,u_i(p)\,u_i(q)
$$

が変数 $q \in M$ に関し L^2-収束の意味で成立した．したがって，$\{i|\, i = 1, 2, \ldots\}$ の適当な部分列 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ を取ると，

$$
\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{i_k} e^{-\lambda_i z}\,u_i(p)\,u_i(q) = F(p,q,z) \qquad (6.78)
$$

が任意の $p \in M$ と $z \in \mathbb{C}^+$ 及びほとんど至る所の $q \in M$ において成り立つ．他方，パーセバルの等式により，

$$
\infty > \left(F\left(p, \bullet, \frac{z}{2}\right), F\left(p', \bullet, \frac{\overline{z}}{2}\right) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i \frac{z}{2}}\,u_i(p)\; e^{-\lambda_i \frac{z}{2}}\,u_i(p') \qquad (6.79)
$$

が成り立つ．(6.79) は任意の $p, p' \in M$ と $z \in \mathbb{C}^+$ について成り立つのであるから，(6.79) の右辺の級数は収束する．(6.79) の左辺は $p, p' \in M$ と $z \in \mathbb{C}^+$ について $M \times M \times \mathbb{C}^+$ 上で連続である．その極限は $F(p,p',z)$ と一致している．□

系 6.10　任意の $z \in \mathbb{C}^+$ に対して次が成立する：

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z} = 収束 = \int_M F(p,p,z)\, v_g(p). \tag{6.80}$$

証明　$z = x + \sqrt{-1}\, y \in \mathbb{C}^+$ $(x > 0)$ に対して，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |e^{-\lambda_i z}|\, u_i(p)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i x}\, u_i(p)^2 \quad (収束) \\ &= F(p,p,x). \end{aligned} \tag{6.81}$$

ここで (6.81) の右辺は $p \in M$ について連続なので，特に M 上可積分で，項別積分可能である．ゆえに

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z}\, u_i(p)^2\, v_g(p) &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z} \int_M u_i(p)^2\, v_g(p) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z} \end{aligned} \tag{6.82}$$

は収束する．(6.82) の左辺は $\int_M F(p,p,z)\, v_g(p)$ であった.□

次に，今度は複素熱方程式の基本解の存在を示そう（定理 6.13）．これには**パラメトリックス**と呼ばれるものを作り，これを用いて具体的に基本解を構成して示すことができる．

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，z^α を，$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$ 上の関数 x^α の $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ への解析的延長とする（一意的に定まる）．$n := \dim(M)$ とし，$M \times M \times \mathbb{C}^+$ 上の関数 S を

$$S(p,q,z) := (4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r^2}{4z}} \tag{6.83}$$

と定義する．ここで $r = r(p,q) = \overline{pq}$ は 2 点 $p, q \in M$ の距離である．

また，命題 4.8 を思い起こそう：　$f \in C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ は固定点 $p \in M$ からの距離 $\overline{pq}$ のみに依存する関数とする．すなわち，

$$f(q) = \psi(r(q)) \quad (q \in M),$$

ここで $\psi(r)$ は $\mathbb{R}$ 上の r の C^∞ 関数とする．このとき

$$\Delta f = -\frac{d^2\psi}{dr^2} - \left(\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{n-1}{r}\right)\frac{d\psi}{dr} \tag{6.84}$$

が $\widetilde{B}_p(\mathrm{inj})\backslash\{p\} := \{q \in M \mid 0 < \overline{pq} < \mathrm{inj}\}$ 上で成り立つ．ここで inj は (M, g) の単射半径である．

さらに，$A, B \in C^\infty(M)^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\Delta(A\,B) = (\Delta A)\,B - 2\,\langle dA, d\overline{B}\rangle + A\,(\Delta B), \tag{6.85}$$

が成り立つ．ここで $\overline{B}$ は B の複素共役，$\langle\,,\,\rangle$ は (M, g) 上の $\mathbb{C}$-値微分形式に対して各点毎に定義されるエルミート内積を表し，dA は A の外微分である．

さて，

$$M_2' := \{(p, q) \in M \times M \mid \overline{pq} < \mathrm{inj}\} \tag{6.86}$$

とし，先程の関数 S を，$M_2' \times \mathbb{C}^+$ 上で考える．更に，定数 ρ_0, ρ_1 を

$$0 < \rho_0 < \rho_1 < \mathrm{inj}$$

に取り，$\mathbb{R}$ 上の次の性質をもつ C^∞ 関数（カットオフ関数という）η を考える：

$$\begin{cases} \eta = 1 & ((-\infty, \rho_0]\ \text{上}), \\ \eta = 0 & ([\rho_1, \infty)\ \text{上}), \\ \eta' < 0 & (\text{開区間}\ (\rho_0, \rho_1)\ \text{上}). \end{cases}$$

このとき，$k > \frac{n}{2}$ $(n = \dim M)$ に対して，次のような $M \times M \times \mathbb{C}^+$ 上の C^∞ 関数を考える．

$$S_k(p, q, z) := S(p, q, z)\sum_{i=0}^{k} z^i\,u_i(p, q), \tag{6.87}$$

$$H_k(p, q, z) := \eta(\,\overline{pq}\,)\,S_k(p, q, z), \tag{6.88}$$

$$K_k(p, q, z) := \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) H_k. \tag{6.89}$$

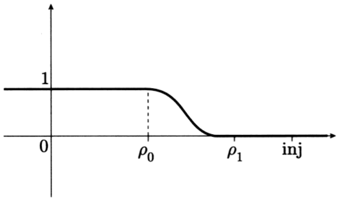


図 6.5　関数 η のグラフ

ここで 関数 S は (6.83) のもので，$u_i\,(i=0,1,\ldots,k)$ は次の (6.90) が成り立つように定めた (6.86) の集合 M_2' 上の C^∞ 関数である．

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right) S_k=(4\pi)^{-\frac{n}{4}}\, z^{k-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r^2}{4z}}\, \Delta_2 u_k. \tag{6.90}$$

実際，次のような段階を踏んで $u_i\,(i=0,1,\ldots,k)$ は求められる．

（第 1 段）まず，(6.90) の左辺 の $\left(\frac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right) S_k$ を次のように計算する．(6.83) の S の形より，$\frac{\partial S}{\partial z}=\left(-\frac{n}{2z}+\frac{r^2}{4z^2}\right)S$ となるので，

$$\frac{\partial S_k}{\partial z}=S\Bigg[\left(-\frac{n}{2z}+\frac{r^2}{4z^2}\right)\left(\sum_{i=0}^{k} z^i\, u_i\right)+\sum_{i=1}^{k} i\, z^{i-1}\, u_i\Bigg] \tag{6.91}$$

となる．(6.85) を用いて，

$$\Delta_2 S_k=(\Delta_2 S)\left(\sum_{i=0}^{k} z^i\, u_i\right)-2\left\langle d_2 S,\sum_{i=0}^{k}\overline{z}^i\, d_2\overline{u_i}\right\rangle+S\left(\sum_{i=0}^{k} z^i\, \Delta_2 u_i\right). \tag{6.92}$$

ここで Δ_2 は第 2 変数 q に関する Δ の作用であり，d_2 は第 2 変数 q に関する外微分を表す．関数 S は $\frac{\partial S}{\partial r}=-\frac{r}{2z}S$ となる r の関数なので，(6.84) を使い，

$$\begin{aligned}\Delta_2 S&=-\frac{d^2 S}{dr^2}-\left(\frac{\Theta'}{\Theta}+\frac{n-1}{r}\right)\frac{dS}{dr}\\&=\left(\frac{n}{2z}-\frac{r^2}{4z^2}\right)S+\frac{r}{2z}\,\frac{\Theta'}{\Theta}\,S.\end{aligned} \tag{6.93}$$

一方，S は r と z の関数なので，

$$\left\langle d_2 S, \sum_{i=0}^{k} \overline{z}^i \, d_2 \overline{u_i} \right\rangle = \sum_{i=0}^{k} z^i \frac{dS}{dr} \frac{\partial u_i}{\partial r} = -\frac{r}{2z} \sum_{i=0}^{k} z^i \frac{\partial u_i}{\partial r} S. \tag{6.94}$$

以上，(6.91) ～ (6.94) を合わせて，次式を得る．

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) S_k = S\Bigg[\sum_{i=1}^{k} i\, z^{i-1} u_i + \frac{r}{2z} \frac{\Theta'}{\Theta} \sum_{i=0}^{k} z^i u_i + \frac{r}{z}\left(\sum_{i=0}^{k} z^i \frac{\partial u_i}{\partial r}\right) + \sum_{i=0}^{k} z^i \Delta_2 u_i\Bigg]. \tag{6.95}$$

（第2段）(6.95) を見ると，各項は $z^{-\frac{n}{2}-1}, \ldots, z^{-k-\frac{n}{2}-1}$ の多項式と指数関数の積の形をしているので，各係数を書き上げ次のように整理する．

$z^{-\frac{n}{2}-1}$ の項の係数：　$r\,\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{r}{2}\,\frac{\Theta'}{\Theta}\, u_0$

$z^{i-\frac{n}{2}-1}$ の項の係数：　$r\,\frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{r}{2}\,\frac{\Theta'}{\Theta} + i\right) u_i + \Delta_2 u_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, k)$

$z^{k-\frac{n}{2}}$ の項の係数：　$\Delta_2 u_k$

となっているので，$z^{k-\frac{n}{2}}$ 以外の各項の係数が全部零となるように u_i を順番に定める．それには，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial r} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Theta'}{\Theta}\, u_0 = 0 \\ r\,\dfrac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\dfrac{r}{2}\,\dfrac{\Theta'}{\Theta} + i\right) u_i + \Delta_2\, u_{i-1} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \end{cases} \tag{6.96}$$

を解いて，帰納的に $u_0, u_1, \ldots, u_k$ を定めればよい．実際，

$$\begin{cases} u_0(p,q) = \Theta^{\frac{1}{2}} \\ u_i(p,q) = r^{-i}\, \Theta^{-\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^r \Theta^{\frac{1}{2}}(p, p_s)\, \Delta_2 u_{i-1}(p, p_s)\, s^{i-1}\, ds \end{cases} \tag{6.97}$$

とすればよい．ここで，$(p,q) \in M_2'$, $r := \overline{pq}$, $q = \mathrm{Exp}_p v$, $p_s := \mathrm{Exp}_p(sv)$ $(v \in T_pM)$ である（M_2' の定義は (6.86) を見よ）．□

さて (6.90) を満たすように作った H_k と K_k はさらに次の性質を満たす．

命題 6.11 各 $k > \frac{n}{2}$ に対して，H_k と K_k は次のように表される．

$$H_k = S \sum_{i=0}^{k} z^i U_i \qquad (U_i(p,q) := \eta(\overline{pq})\, u_i(p,q)) \tag{6.98}$$

$$K_k = S \sum_{i=-1}^{k} z^i V_i. \tag{6.99}$$

ここで $U_i, V_i \in C^\infty(M \times M)$ であり，次の性質をもつ．

$$\mathrm{supp}(U_i) \subset \{(p,q) \in M \times M \,|\, 0 \le \overline{pq} \le \rho_1\} \quad (i = 0, \ldots, k),$$

$$\mathrm{supp}(V_i) \subset \{(p,q) \in M \times M \,|\, \rho_0 \le \overline{pq} \le \rho_1\} \quad (i = -1, \ldots, k-1),$$

$$\mathrm{supp}(V_k) \subset \{(p,q) \in M \times M \,|\, 0 \le \overline{pq} \le \rho_1\}, \quad \text{かつ}$$

$$V_{-1}(p,q) = \eta'(\overline{pq})\, \overline{pq}\, u_0(p,q) < 0 \quad (\rho_0 < \overline{pq} < \rho_1 \text{ のとき}).$$

更に，H_k は次の性質をもつ．

$$\lim_{|z| \to 0,\ |\arg(z)| \le |\alpha|} H_k(p, \bullet, z) = \delta_p \quad (\text{点 } p \text{ におけるディラック測度})$$

すなわち，任意の $f \in C^0(M)^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\lim_{|z| \to 0,\ |\arg(z)| \le |\alpha|} \int_M H_k(p,q,z)\, f(q)\, v_g(q) = f(p). \tag{6.100}$$

証明 U_i についてはその作り方より明らかである．V_i に対しては，

$$\begin{aligned} K_k &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right)(\eta\, S_k) \\ &= \eta \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right) S_k - 2\langle d_2\eta, d_2\overline{S_k}\rangle + (\Delta_2\eta)\, S_k \\ &= \eta\, (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\, z^{k-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r^2}{4z^2}}\, \Delta_2 u_k - 2\langle d_2\eta, d_2\overline{S_k}\rangle + (\Delta_2\eta)\, S_k \end{aligned} \tag{6.101}$$

ここで η は r にのみ依存しているので,

$$\begin{cases} \langle d_2\eta, d_2\overline{S_k}\rangle = \eta'(\overline{pq})\,\dfrac{\partial S_k}{\partial r} \\ \dfrac{\partial S_k}{\partial r} = -\dfrac{rS}{2z}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} z^i\,u_i + S\sum_{i=0}^{k} z^i\,\dfrac{\partial u_i}{\partial r} \end{cases}$$

したがって, V_i については,

$$V_{-1}(p,q) = \eta'(\overline{pq})\,\overline{pq}\,u_0(p,q),$$

$$V_k(p,q) = S\left\{\eta\,\Delta_2 u_k - 2\eta'(\overline{pq})\,\frac{\partial u_k}{\partial r} + (\Delta_2\eta)\,u_k\right\},$$

$$V_i(p,q) = S\left\{\eta'(\overline{pq})\,\overline{pq}\,u_{i+1} - 2\eta'(\overline{pq})\,\frac{\partial u_i}{\partial r} + (\Delta_2\eta)\,u_i\right\}\ \ (i=0,\ldots,k-1) \tag{6.102}$$

となり, これから言える.

(6.100) について, $\eta=1$ ($\overline{pq}\le\rho_0<\mathrm{inj}$) より, $f\in C^0(M)^{\mathbb{C}}$ に対しては,

$$\begin{aligned}\int_M H_k(p,q,z)\,f(q)\,v_g(q) &= \sum_{i=0}^{k} z^i\int_M \eta(\overline{pq})\,S(p,q,z)\,u_i(p,q)\,f(q)\,v_g(q) \\ &= \sum_{i=0}^{k} z^i\int_{\widetilde{B}_p(\mathrm{inj})} S(p,q,z)\,u_i(p,q)\,f(q)\,v_g(q).\end{aligned} \tag{6.103}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{B}_p(\mathrm{inj})} S(p,q,z)\,u_i(p,q)\,f(q)\,v_g(q) &= \int_{B_p(\mathrm{inj})}(4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|v|^2}{4z}} \\ &\quad\times u_i(p\,\mathrm{Exp}_p(v))\,f(\mathrm{Exp}_p(v))\,\Theta\,dv,\end{aligned} \tag{6.104}$$

$B_p(\mathrm{inj}) = \{v\in T_pM\,|\,|v|<\mathrm{inj}\}$, dv は T_pM 上のルベーグ測度とする. ここで更に

$$\widetilde{u_i}(v) := \begin{cases} u_i(p,\mathrm{Exp}_p(v)), & v\in B_p(\mathrm{inj}) \\ 0\qquad\qquad, & v\notin B_p(\mathrm{inj}) \end{cases} \tag{6.105}$$

と定義し，$\widetilde{f}, \widetilde{\Theta}$ も同様に定義する．このとき，(6.104) は

$$(6.104)\ \text{の右辺} = \int_{B_p(\mathrm{inj})} \sum_{i=0}^{k} z^i \int_{T_pM} (4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|v|^2}{4z}}\, \widetilde{u_i}(v)\, \widetilde{f}(v)\, \widetilde{\Theta}(v)\, dv. \tag{6.106}$$

ここで

$$\lim_{|z|\to 0,\ |\arg(z)|\le|\alpha|} \int_{T_pM} (4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|v|^2}{4z}}\, \widetilde{u_i}(v)\, \widetilde{f}(v)\, \widetilde{\Theta}(v)\, dv = \widetilde{u_i}(0)\, \widetilde{f}(0)\, \widetilde{\Theta}(0). \tag{6.107}$$

実際，原点 0 の近傍に supp をもつ $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}$-値連続関数 f に対して，

$$\lim_{|z|\to 0,\ |\arg(z)|\le|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|u-v|^2}{4z}}\, f(v)\, dv = f(u) \tag{6.108}$$

を示せばよい．これが言えれば，

$$\lim_{|z|\to 0,\ |\arg(z)|\le|\alpha|} \int_M H_k(p,q,z)\, f(q)\, v_g(q) = \widetilde{u_0}(0)\, \widetilde{f}(0)\, \widetilde{\Theta}(0) = f(p) \tag{6.109}$$

を得る．

(6.108) は次のように示される．$u \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の関数を

$$S_u(v) := (4\pi z)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|u-v|^2}{4z}} \qquad (v \in \mathbb{R}^n)$$

とおくと，よく知られているように，次が成り立つ：

$$\int_{\mathbb{R}^n} S_u(v)\, f(v)\, dv = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{S_u}(\xi)\, \overline{\widehat{f}}(\xi)\, d\xi, \tag{6.110}$$

ここで $\overline{f}$ は f の複素共役であり，$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\, e^{\sqrt{-1}\,\langle v,\xi\rangle}\, dv$ (f のフーリエ変換) である．また，$\widehat{S_u}$ は次のように計算される．

$$\widehat{S_u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} S_u(v)\, e^{\sqrt{-1}\langle v,\xi\rangle}\, dv$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|u-v|^2}{4z}}}{(2z)^{\frac{n}{2}}} e^{\sqrt{-1}\langle v,\xi\rangle}\, dv$$

$$= \frac{e^{\sqrt{-1}\,\langle u,\xi\rangle}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|v|^2}{4z}}}{(2z)^{\frac{n}{2}}} e^{\sqrt{-1}\langle v,\xi\rangle}\, dv = \frac{e^{\sqrt{-1}\,\langle u,\xi\rangle}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-z\,|\xi|^2}. \tag{6.111}$$

(6.111) は $z \in \mathbb{R}$ のときはよく知られた等式だが，両辺は z について正則なので，$\mathbb{C}^+$ 上で成立していることに注意．(6.110) の右辺は領域 $\{z \in \mathbb{C}|\ |\arg(z)| \le |\alpha|\}$ において $|z| \to 0$ とすると，次のようになる：

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\,\langle u,\xi\rangle}\, e^{-z|\xi|^2}\, \widehat{\widehat{f}}(\xi)\, d\xi$$

$$\to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\,\langle u,\xi\rangle}\, \widehat{\widehat{f}}(\xi)\, d\xi = f(u). \tag{6.112}$$

(6.112) の最後の等式はフーリエ逆変換の等式である．(6.108) を得た.□

定義 6.12　2つの連続関数 $A,\ B \in C^0(M \times M \times \mathbb{C}^+)$ に対して，

$$(A * B)(p,q,z) := \int_0^z \int_M A(p,a,w)\, B(a,q,z-w)\, dw\, v_g(a) \tag{6.113}$$

と定義する．ここで積分 $\int_0^z dw$ は図 6.6 のように $z \in \mathbb{C}^+$ と 0 を結ぶ線分を積分路とする複素積分を表す．($\mathbb{C}^+$ は $\mathbb{C}$ 内の開集合である．積分が収束するような $A,\ B$ のみを扱う．以下で扱う関数は $z^{k-\frac{n}{2}\pm j}$ の項を含む場合があり，(6.113) の積分の収束には注意を払う必要がある)．

このとき，$A,\ B,\ C \in C^0(M \times M \times \mathbb{C}^+)$ に対して，

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

である．そこで，以下では，

$$A^{*\,\ell} := \underbrace{A * \cdots * A}_{\ell\text{ 回}}, \qquad A^{*\,0} * B := B$$

とおく．

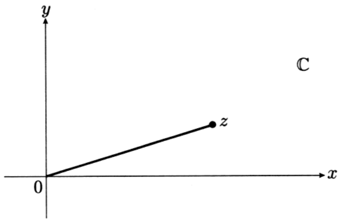


図 6.6　積分路

定理 6.13　**(複素熱方程式の基本解の存在)**　$k > \frac{n}{2} + 2$ に対して，級数

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} K_k^{*\,\ell} * H_k \tag{6.114}$$

は収束して，複素熱方程式の基本解を与える．

証明　(第1段) K_k の表示式 (6.99) の $i = -1, \ldots, k-1$ の各項あるいは (6.101) の第2項と第3項については $\mathrm{supp}(V_i) \subset \{(p,q) \in M \times M |\, \rho_0 \le \overline{pq} \le \rho_1\}$ であるので，(6.83) より，

$$\left| S \sum_{i=-1}^{k-1} z^i \, V_i \right| \le A\, |z|^{-\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{\rho_0}{4|z|}} \tag{6.115}$$

となる．ここで $\lim_{|z|\to 0} |z|^{-\ell}\, e^{-\frac{\rho_0}{4|z|}} = 0$ $(\forall\, \ell \in \mathbb{R})$ なので，左辺は無視できる項となるため，(6.101) の第1項，つまり (6.99) の $i = k$ の項のみを考慮すればよい．結局，任意の正定数 $T > 0$ に対して，$k > \frac{n}{2}$ のとき，$|z| \le T$ である任意の $z \in \mathbb{C}^+$ に対し

$$|K_k| \le A\, |z|^{k-\frac{n}{2}} \le B \tag{6.116}$$

を得る．A, B は T にのみ依存する正定数である．

H_k については (6.98) より，$|z| \le T$ である任意の $z \in \mathbb{C}^+$ に対し

$$|H_k| \le B \tag{6.117}$$

を得る．(6.116) と (6.117) を合わせて，積分 $K_k{}^{*\ell} * H_k$ は収束していることがわかった．

（第2段）更に，$k > \frac{n}{2}$ のとき，級数 $Q_k = \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell} K_k{}^{*\ell}$ は収束し，$|z| \leq T$ である任意の $z \in \mathbb{C}^+$ に対し

$$|Q_k| \leq C\,|z|^{k-\frac{n}{2}} \tag{6.118}$$

を満たすことを示そう．ここで正定数 C は T にのみ依存する定数である．

実際，まず，$V := \mathrm{Vol}(M,g)$ を (M,g) の体積とすると，

$$|K_k{}^{*\ell}| \leq \frac{A\,B^{\ell-1}\,V^{\ell-1}\,|z|^{k-\frac{n}{2}+\ell-1}}{(k-\frac{n}{2}+1)\cdots(k-\frac{n}{2}+\ell-1)} \tag{6.119}$$

が成り立つ．ℓ に関する帰納法で示す．$\ell = 1$ のときは (6.116) より正しい．$\ell - 1$ のとき正しいとして，ℓ のときを見る．

$$\begin{aligned}
|K_k{}^{*\ell}(p,q)| &= \left| \int_0^z \int_M K_k{}^{*(\ell-1)}(p,a,w)\,K_k(a,q,z-w)\,dw\,v_g(a) \right| \\
&\leq \int_0^{|z|} ds \int_M |K_k{}^{*(\ell-1)}(p,a,s)|\,\big|K_k\big(a,q,|z|-s\big)\big|\,v_g(a) \\
&\leq \int_0^{|z|} \frac{A\,B^{\ell-2}\,V^{\ell-2}\,s^{k-\frac{n}{2}+\ell-2}}{(k-\frac{n}{2}+1)\cdots(k-\frac{n}{2}+\ell-2)}\,B\,V\,ds \\
&= \frac{A\,B^{\ell-1}\,V^{\ell-1}}{(k-\frac{n}{2}+1)\cdots(k-\frac{n}{2}+\ell-2)} \int_0^{|z|} s^{k-\frac{n}{2}+\ell-2}\,ds \\
&= \frac{A\,B^{\ell-1}\,V^{\ell-1}}{(k-\frac{n}{2}+1)\cdots(k-\frac{n}{2}+\ell-1)}\,|z|^{k-\frac{n}{2}+\ell-1}.
\end{aligned} \tag{6.120}$$

(6.120) より ℓ のときも正しい．(6.119) より，

$$\begin{aligned}
|Q_k| &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |K_k{}^{*\ell}| \\
&\leq |z|^{k-\frac{n}{2}} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{A\,B^{\ell-1}\,V^{\ell-1}\,T^{\ell-1}}{(k-\frac{n}{2}+1)\cdots(k-\frac{n}{2}+\ell-1)} \right) \\
&\leq C\,|z|^{k-\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{6.121}$$

を得る．ここで C は正の定数である．これから特に Q_k は絶対収束している．

（第3段）同様にして，$k > \frac{n}{2} + m$ ($m \geq 0$, 整数) のとき，D を3変数 $(p, q, z) \in M \times M \times \mathbb{C}^+$ に関する次数が m 以下の任意の偏微分とすると，第2段の (6.118) と全く同様にして，$k > \frac{n}{2} + m$ のとき，

$$\left| D\, {K_k}^{*\ell} \right| \leq \frac{A\, B^{\ell-1}\, V^{\ell-1}\, |z|^{k-\frac{n}{2}-m+\ell-1}}{(k-\frac{n}{2}-m+1)\cdots(k-\frac{n}{2}-m+\ell-1)} \tag{6.122}$$

を得る．これから級数 $\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\, D\, {K_k}^{*\ell}$ は絶対収束し，$D\, Q_k$ に一致することが分かる．このことから，$k > \frac{n}{2} + m$ のとき，Q_k が3変数 (p, q, z) について，C^m 級であることが分かり，特に，z について正則であることが言える．

（第4段）最後に，

$$F := \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\, {K_k}^{*\ell} * H_k = H_k + \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\, {K_k}^{*\ell} * H_k \tag{6.123}$$

が定義 6.7 における複素熱方程式の基本解の条件 (1), (2) を満たすことを示そう．最初に $k > \frac{n}{2}$ のとき，(2) を示す．第2段の (6.118) より

$$\left| \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\, {K_k}^{*\ell} * H_k \right| \leq C \int_0^{|z|} \int_M s^{k-\frac{n}{2}}\, |H_k|\, ds\, v_g \tag{6.124}$$

となり，(6.117) を (6.124) に代入して，(6.124) の右辺 $\leq \frac{BCV}{k-\frac{n}{2}+1}\, |z|^{k-\frac{n}{2}+1}$．ゆえに，

$$F = H_k + O(|z|^{k-\frac{n}{2}+1}) \tag{6.125}$$

を得る．したがって，命題 6.11 の (6.100) より，上記と合わせて，任意の $f \in C^0(M)^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\begin{aligned} &\lim_{|z|\to 0,\, |\arg(z)| \leq |\alpha|} \int_M F(p, q, z)\, f(q)\, v_g(q) \\ &\qquad = \lim_{|z|\to 0,\, |\arg(z)| \leq |\alpha|} \int_M H_k(p, q, z)\, f(q)\, v_g(q) \\ &\qquad = f(p). \end{aligned} \tag{6.126}$$

(6.126) は，求める (6.72) である．

次に $k > \frac{n}{2} + 2$ のとき，F が複素熱方程式 (6.71) を満たすことを示す．$A \in C^2(M \times M \times \mathbb{C}^+)$ として，$A * H_k$ と $A * K_k$ の積分が収束するものとすると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right)(A * H_k) = A + A * K_k \tag{6.127}$$

が成り立つ．実際，(6.113)

$$A * H_k(p, q, z) = \int_0^z \int_M A(p, a, w)\, H_k(a, q, z - w)\, dw\, v_g(a)$$

であったので，

$$\Delta_2(A * H_k) = A * (\Delta_2 H_k) \tag{6.128}$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}(A * H_k) \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \int_M A(p, a, w)\, H_k(a, q, z - w)\, dw\, v_g(a) \\ &\quad = A * \frac{\partial H_k}{\partial z} + \lim_{w \to z,\, \arg(w) = \arg(z)} \int_M A(p, a, w)\, H_k(a, q, z - w)\, v_g(a). \end{aligned} \tag{6.129}$$

ここで (6.129) の第2項は命題 6.11 の (6.100) より $A(p, q, z)$ に一致する．ゆえに，

$$\frac{\partial}{\partial z}(A * H_k) = A + A * \frac{\partial H_k}{\partial z} \tag{6.130}$$

を得る．(6.128) と (6.130) より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_2\right)(A * H_k) = A + A * K_k. \tag{6.131}$$

したがって，$k > \frac{n}{2} + 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right)F &= \left(\frac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,{K_k}^{*\,\ell} * H_k\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right)H_k + \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\bigl({K_k}^{*\,\ell} + {K_k}^{*\,\ell} * K_k\bigr)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{((6.131) を使った)}\\ &= K_k + \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\left({K_k}^{*\,\ell} + {K_k}^{*\,\ell+1}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

$k > \frac{n}{2}+2$ のとき，F が複素熱方程式の基本解であることがわかった.□

定理 6.14 **(基本解のトレースの漸近展開公式)**
すべての $k > \frac{n}{2}(n := \dim M)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\sum_{i=0}^{k} a_i\, t^i + O(t^{k+1-\frac{n}{2}}) \qquad (\forall\ t > 0) \tag{6.132}$$

が成立する．(6.132) の右辺の係数 a_i $(i = 0, 1, \ldots)$ は

$$a_i = \int_M u_i(p,p)\, v_g(p) \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{6.133}$$

により与えられる.

証明 $k > \frac{n}{2}$ のとき，(6.125) より，

$$F = H_k + O(t^{k+1-\frac{n}{2}}) \qquad (\forall\ t > 0). \tag{6.134}$$

ここで命題 6.11 の (6.98) より，

$$H_k = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r^2}{4t}} \sum_{i=0}^{k} t^i\, U_i \tag{6.135}$$

であったので，

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \int_M F(p,p,t)\, v_g(p)$$

$$= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{r^2}{4t}} \sum_{i=0}^{k} t^i \int_M u_i(p,p)\, v_g(p) + O(t^{k+1-\frac{n}{2}}) \qquad (6.136)$$

を得る.□

ここで (6.97) より,

$$u_0(p,p) = \Theta^{\frac{1}{2}}(p,p) = 1 \qquad (\forall\ p \in M). \qquad (6.137)$$

したがって,

$$a_0 = \int_M v_g = \mathrm{Vol}(M,g) \qquad (6.138)$$

である. さらに,

$$a_1 = \frac{1}{6}\int_M \tau\, v_g \qquad (6.139)$$

$$a_2 = \frac{1}{360}\int_M \left(2\,|R|^2 - 2\,|\rho|^2 + 5\,\tau^2\right) v_g \qquad (6.140)$$

であることが知られている ([5], [34], [47]). ここで τ, R, ρ はそれぞれ (M,g) のスカラー曲率, 曲率テンソル, リッチテンソルである. $|R|$, $|\rho|$ はそれぞれ R, ρ の (M,g) での各点ノルムを表す. 酒井隆 ([46]) により, a_3 も計算されている.

以上の結果により, (M,g) のラプラス作用素 Δ_g のスペクトル $\mathrm{Spec}(M,g)$ から (M,g) の幾何学的量 (6.138), (6.139), (6.140) の情報がわかることになる.

6.4 擬フーリエ変換

本節では, 更に熱方程式の基本解を調べるために, フーリエ変換に似た“擬フーリエ変換”という言葉を用意する. 擬フーリエ変換を用いて, コラン=ド=ヴェルディィエの結果が記述される.

定義 6.15 (1) 以下では常に“$z \to \infty$”とは，固定された $\xi_0 > 0$ を取って，$z = \xi_0 + \sqrt{-1}y$ かつ $y \to \infty$ を意味するものとする．

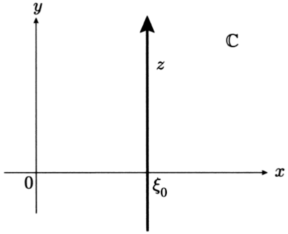


図 6.7　$z \to \infty$ の図

(2) $\mathbb{C}^+$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数 f が“$z \to \infty$ のとき，**指数関数的に有界**”とは，正定数 $A, B > 0$ が存在して，

$$|f(\xi_0 + \sqrt{-1}y)| \leq A\,e^{B|y|} \quad (\forall\ y \in \mathbb{R}) \tag{6.141}$$

を満たすときをいう．

(3) (2) のような $\mathbb{C}^+$ 上の関数 f に対して，

$$\widehat{f}(\sigma, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_0 + \sqrt{-1}y)\,e^{\sqrt{-1}\,ty - \sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy, \qquad ((\sigma, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \tag{6.142}$$

と定義する．ここで $\mathbb{R}_+^* := \{\sigma \in \mathbb{R} | \sigma > 0\}$．この $\widehat{f}$ を f の**擬フーリエ変換**という．

補題 6.16　関数 $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が $z \to \infty$ のとき，指数関数的に有界ならば，$\widehat{f}(\sigma, t)$ の積分は絶対収束する．

証明　次の評価式より明らかである．

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\sigma, t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi_0 + \sqrt{-1}y)|\,e^{-\sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy \\ &\leq A \int_{-\infty}^{\infty} e^{B\,|y|}\,e^{-\sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy < \infty. \quad \square\end{aligned}$$

定義 6.17　$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ を満たす数列 $\{t_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ と関数 f, f_ℓ : $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ $(\ell = 0, 1, \ldots)$ に対して，次の用語を使う：

(1) $f(z) =_F \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell z} f_\ell(z)$ が成り立つとは，

$$(a)\ \forall\, t \notin \{t_\ell | \ell = 0, 1, \ldots\} \text{ に対して，}\quad \widehat{f}(\sigma, t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right), \quad \text{かつ}$$

$$(b)\ \forall\, \ell = 0, 1, \ldots \text{ に対して，}\quad \widehat{f}(\sigma, t_\ell) = \widehat{f_\ell}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0 t_\ell} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

が成り立つときをいう．

(2) 任意の実数 α に対して，$f(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell z} f_\ell(z)$ が成り立つとは，

$$z^\alpha f(z) =_F \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell z} z^\alpha f_\ell(z)$$

が成り立つときをいう．

(3) 関数 g : $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が $\boldsymbol{T_\alpha}$ **型の関数**であるとは，

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j\, z^{\alpha_j} & (\mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ のとき}) \\ \overline{g(\overline{z})} & (\mathrm{Im}(z) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と g が表示されるときをいう．ここで $-\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$, $a_j \in \mathbb{C}$ とする．

命題 6.18　関数 f, f_ℓ : $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ $(\ell = 0, 1, \ldots)$ について，$f(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell z} f_\ell(z)$ が成り立ち，各 $f_\ell(z)$ $(\ell = 0, 1, 2, \ldots)$ が T_α 型の関数とする．このとき，t_ℓ と f_ℓ $(\ell = 0, 1, 2, \ldots)$ は f によって一意的に定まる．

注意 6.19　擬フーリエ変換 $\widehat{f}(\sigma, t)$ の定義において，$e^{\sqrt{-1}\, ty - \sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}$ を例えば，$e^{\sqrt{-1}\, ty - \sigma y^2}$ で置き換えると，命題 6.18 は成り立たない．

補題 6.20　(1) 関数 $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が "$z \to \infty$ のとき有界", すなわち, 正定数 $A > 0$ が存在して, $|f(\xi_0 + \sqrt{-1}\,y)| \leq A$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ とする. このとき,

$$\widehat{f}(\sigma, t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{6.143}$$

(2) $P(z) = \sum_{p=p_0}^{p_1} a_p\, z^{\frac{p}{2}}$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ とする. ここで p_0, p_1, p は整数とする. これに対し, $|P|(z) := \sum_{p=p_0}^{p_1} |a_p|\, |z|^{\frac{p}{2}}$ とおく. このとき, $0 < \sigma \leq 1$ に対して, 次が成り立つ:

(a) $p_0 \geq 0, t \leq 0$ のとき,

$$|\widehat{P}(\sigma, t)| \leq C\,\Gamma\left(\frac{p_1}{4} + \frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{t^2}{4\sigma}}\, |P|\left(2\xi_0 + \frac{|t| + 4}{\sigma}\right) \tag{6.144}$$

となる. ここで $C > 0$ は定数である.

(b) $p_0 \geq 0, |t| > 0$ のときは, $\widehat{P}(\sigma, t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ となる. さらに, $|t| \geq |t_0| > 0$ のときは, これは t について一様に成立する.

(c) $p_1 \leq 0$ のとき, $|\widehat{P}(\sigma, t)| \leq \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} |P|(\xi_0)$ が成り立つ.

(3) 関数 $Q : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が T_α 型, すなわち,

$$Q(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j\, z^{\alpha_j} & (\mathrm{Im}(z) \geq 0) \\ \overline{Q(\overline{z})} & (\mathrm{Im}(z) < 0) \end{cases}$$

ここで $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$, $a_j \in \mathbb{C}$ とする. もし, $a_N \neq 0$ ならば, $h \neq 0$ が存在して, $\widehat{Q}(\sigma, 0) \sim h\,\sigma^{-\frac{\alpha_N + 1}{2}}$ $(\sigma \to 0$ のとき$)$ となる. ゆえに, もし $\widehat{Q}(\sigma, 0) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ $(\sigma \to 0$ のとき$)$ ならば, $Q \equiv 0$ となる.

証明　補題 6.20 を仮定して, 命題 6.18 を示そう. いま,

$$f(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell\, z} f_\ell(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell{}'\, z} g_\ell(z)$$

とする. ここに f_ℓ, g_ℓ はともに T_α 型の関数とする.

(第1段) 初めに,

$$t_\ell = t_\ell{}' \quad (\ell = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.145}$$

を示そう. $\{t_m | m = 0, 1, 2, \ldots\} \neq \{t_\ell{}' | \ell = 0, 1, 2, \ldots\}$ とする. $\exists t_\ell{}' \notin \{t_m | m = 0, 1, 2, \ldots\}$ とする. このとき, 定義 6.17 (1) より,

$$\widehat{z^\alpha f}(\sigma, t_\ell{}') = \widehat{z^\alpha g_\ell}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0\, t_\ell{}'} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right), \quad \text{かつ}$$

$$\widehat{z^\alpha f}(\sigma, t_\ell{}') = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

したがって,

$$\widehat{z^\alpha g_\ell}(\sigma, 0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

ところが g_ℓ は T_α 型であり $z^\alpha\, g_\ell$ は補題 6.20 (3) より, $z^\alpha\, g_\ell \equiv 0$, すなわち $g_\ell \equiv 0$ となる. したがって, $t_\ell{}'$ に対応する項は $f(z)$ の展開式に現れない. 同様に, $\exists t_m \notin \{t_\ell{}' | \ell = 0, 1, 2, \ldots\}$ のときも同様なので, (6.145) を得る.

(第2段) したがって,

$$f(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell\, z}\, f_\ell(z) =_{F_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-t_\ell\, z}\, g_\ell(z).$$

このとき定義 6.17 (1) より,

$$\widehat{z^\alpha f}(\sigma, t_\ell) = \widehat{z^\alpha f_\ell}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0\, t_\ell} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \widehat{z^\alpha g_\ell}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0\, t_\ell} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

したがって, $(\widehat{z^\alpha f_\ell - z^\alpha g_\ell})(\sigma, 0) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ となる. ここで $z^\alpha f_\ell - z^\alpha g_\ell$ に対し補題 6.20 (3) を適用すると, $z^\alpha f_\ell - z^\alpha g_\ell \equiv 0$, すなわち $f_\ell \equiv g_\ell$ となる. 命題 6.18 を得た.□

証明 補題 6.20 を証明する. (1) $|f(\xi_0 + \sqrt{-1}\, y)| \leq A$ とすると,

$$|\widehat{f}(\sigma, t)| \leq A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\, dy = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma y^2}\, dy = A \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

(2) (a) 非負整数 k に対して,

$$I_k(\sigma,t) := \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_0 + \sqrt{-1}\,y)^{\frac{k}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,ty-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\, dy$$

とおく．この積分を $\zeta := y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma}$ と変数変換する．このとき,

$$I_k(\sigma,t) = \int_C \left(\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \zeta\right)\right)^{\frac{k}{2}} e^{\sqrt{-1}\,t\zeta + \sqrt{-1}\,\frac{t}{\sqrt{\sigma}} - \frac{t^2}{2\sigma} - \sigma\left(\zeta + \sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma}\right)^2} d\zeta. \tag{6.146}$$

ここで積分路 C は図 6.8 のように取る．

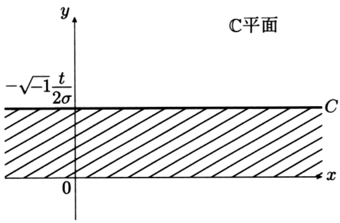


図 6.8 $t \le 0$ のときの積分路 C

I_k の右辺の積分の被積分関数は k が偶数か $t \le 0$ のとき正則なので，コーシーの積分定理より，$\zeta \in \mathbb{R}$ 上の積分と一致する．ゆえに，(6.146) は次式と一致する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} &\left(\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \zeta\right)\right)^{\frac{k}{2}} e^{\sqrt{-1}\,t\zeta + \sqrt{-1}\,\frac{t}{\sqrt{\sigma}} - \frac{t^2}{2\sigma} - \sigma(\zeta + \sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma})^2} d\zeta \\ &= e^{\sqrt{-1}\,\frac{t}{\sqrt{\sigma}} - \frac{t^2}{4\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \zeta\right)\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\sigma\,\zeta^2}\, d\zeta.\end{aligned} \tag{6.147}$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta|^{\frac{k}{2}}\, e^{-\sigma\,\zeta^2}\, d\zeta = \int_0^{\infty} \eta^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\, e^{-\sigma\,\eta}\, d\eta = \Gamma\left(\frac{k}{4} + \frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}$$

および,

$$\left|\left(\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \zeta\right)\right)^{\frac{k}{2}}\right| \le C\left\{\left|\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\,\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right|^{\frac{k}{2}} + |\zeta|^{\frac{k}{2}}\right\}$$

なので, $k \ge 0$ 整数, $t \le 0$ のとき,

$$|I_k(\sigma,t)| \le C\,e^{-\frac{t^2}{4\sigma}}\left\{\left|\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\,\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right|^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}} + \Gamma\left(\frac{k}{4}+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\right\}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}\left|\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + \sqrt{-1}\,\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right|^{\frac{k}{2}} + \sigma^{-\frac{k}{4}} &\le \left(\left|\xi_0 - \frac{t}{2\sigma}\right| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^{\frac{k}{2}} + \sigma^{-\frac{k}{4}}\\ &\le \left(\xi_0 + \frac{|t|}{2\sigma} + \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\right)^{\frac{k}{2}}\\ &\le \left(\xi_0 + \frac{|t|}{2\sigma} + \frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{k}{2}}. \qquad (6.148)\end{aligned}$$

最後の不等式は $0 < \sigma \le 1$ より $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \le \frac{1}{\sigma}$ となることから出る. (6.148) より,

$$|I_k(\sigma,t)| \le C'\,\Gamma\left(\frac{k}{4}+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{t^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0 + \frac{|t|+4}{\sigma}\right)^{\frac{k}{2}}. \qquad (6.149)$$

これから, (a) (6.144) を得た.

(b) P が z の整数幂のみのときは (a) より証明は終わっている.

(第1段) $t > 0$, $z^{\ell-\frac{1}{2}}$ $(\ell \in \mathbb{Z})$ の場合を考える. このとき

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0 + \sqrt{-1}\,y)^{\ell-\frac{1}{2}}\,e^{\sqrt{-1}\,ty - \sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0 + \sqrt{-1}\,y)^{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)\,x^2}\,dx\right)e^{\sqrt{-1}\,ty - \sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0 + \sqrt{-1}\,y)^{\ell}\,e^{-\xi_0\,x^2 + \sqrt{-1}\,y(t-x^2) - \sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dxdy,\end{aligned}$$

(6.150)

ここで

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\frac{1}{2}}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)\,x^2}\,dx \tag{6.151}$$

を使った．(6.151) は $\xi_0>0$ なので $\xi_0+\sqrt{-1}\,y$ について両辺正則であり，$y=0$ のとき等式成立なので，正しい．

（第2段）ここで $\sqrt{t}$ の近傍で 1，$\sqrt{t}$ から十分離れたところでは 0，となる図6.9のような C^∞ 関数 φ を取る．

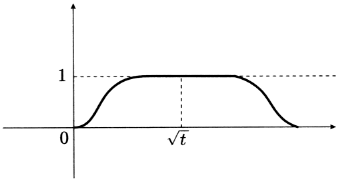


図 6.9 関数 φ の図

$1=\varphi(x)+(1-\varphi(x))$ を (6.150) 式に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}(6.150)=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\ell}\varphi(x)e^{-\xi_0\,x^2+\sqrt{-1}\,y(t-x^2)-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}dxdy\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\ell}\,(1-\varphi(x))\,e^{-\xi_0\,x^2+\sqrt{-1}\,y(t-x^2)-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dxdy.\end{aligned} \tag{6.152}$$

（第3段）(6.152) の第1項について，$F(y):=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)\,x^2}\,dx$ とおくと，$\mathrm{supp}(\varphi)$ コンパクトなので，$F(y)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に拡張されて，

$$\begin{aligned}\text{第1項}&=\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\,(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\ell}\,e^{\sqrt{-1}\,yt-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\&=e^{\sqrt{-1}\frac{t}{\sqrt{\sigma}}-\frac{t^2}{4\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\zeta+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}+\sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma}\right)\\&\qquad\times\left(\xi_0-\frac{t}{2\sigma}+\sqrt{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}+\zeta\right)\right)^{\ell}e^{-\sigma\,\zeta^2}\,d\zeta\end{aligned} \tag{6.153}$$

を得る．ここで

$$\left|F\left(\zeta+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}+\sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma}\right)\right|\le C<\infty \tag{6.154}$$

である（C は ζ, t, σ に依らない正定数である）．なぜなら，

$$\begin{aligned}\left|F\left(\zeta+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}+\sqrt{-1}\,\frac{t}{2\sigma}\right)\right| &\le \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-(\xi_0-\frac{t}{2\sigma})\,x^2}\,dx\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{(\xi_0+\frac{|t|}{2\sigma})\,x^2}\,dx\\ &\le \left(\xi_0+\frac{|t|}{2\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\xi_0+\frac{|t|}{2\sigma}}}\right)e^{x^2}\,dx,\end{aligned}$$

ここで $(\xi_0+\frac{|t|}{2\sigma})^{-\frac{1}{2}}\le\xi_0{}^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{|x|}{\sqrt{\xi_0+\frac{|t|}{2\sigma}}}\le\frac{|x|}{\sqrt{\xi_0}}$ かつ $\mathrm{supp}(\varphi)$ はコンパクトであることからいえる．したがって，(6.154) より，(a) と同様にして，

$$|\,\text{第 1 項}\,|\le C'\,\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{t^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0+\frac{|t|+4}{\sigma}\right)^{\ell} \tag{6.155}$$

を得る．

（第4段）(6.152) の第2項については，

$$\begin{aligned}\text{第 2 項} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\varphi(x))\,e^{-\xi_0\,x^2}\\ &\qquad\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\ell}\,e^{\sqrt{-1}\,y(t-x^2)-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\right]dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\{\sqrt{t}\text{ の近傍の外}\}}e^{-\xi_0\,x^2}\left[\text{上記と同じ式}\right]dx.\end{aligned} \tag{6.156}$$

x が $\sqrt{t}$ の近傍の外を動くとき $|t-x^2|>0$ なので，(6.155) と同様にして，

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\ell}\,e^{\sqrt{-1}\,y(t-x^2)-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\right|\\ &\qquad\le C''\,\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{(t-x^2)^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0+\frac{|t-x^2|+4}{\sigma}\right)^{\ell}\end{aligned} \tag{6.157}$$

を得る．(6.157) において，$0<\sigma\le 1$ かつ x が $\sqrt{t}$ の近傍の外にあるときは，$t-x^2\ge c>0$ である限り，

$$e^{-\frac{(t-x^2)^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0+\frac{|t-x^2|+4}{\sigma}\right)^{\ell}\le C''' \tag{6.158}$$

となる（$C'''>0$ は σ, x, t に依らない正定数）．したがって，(6.157) と (6.158) と合わせて，

$$|\,\text{第 2 項}\,|\le C\,\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}} \tag{6.159}$$

とできる（$C>0$ も σ, x, t に依らない正定数）．(6.155) と (6.159) を合わせて，(b) の証明を終えた．

(c) の証明．非負整数 $k\ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{-\frac{k}{2}}\,e^{\sqrt{-1}\,ty-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\right|\\
&\qquad\le\int_{-\infty}^{\infty}|\xi_0+\sqrt{-1}\,y|^{-\frac{k}{2}}\,e^{-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\
&\qquad\le\xi_0{}^{-\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\
&\qquad=\xi_0{}^{-\frac{k}{2}}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

これから，$p_1\le 0$ のとき，$|\widehat{P}(\sigma,t)|\le\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}|P|(\xi_0)$ を得る．

(3) の証明．T_α 型関数 $Q:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}(\sigma,0)&=\int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)\,e^{-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\
&=\sum_{j=1}^{N}a_j\int_0^{\infty}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\alpha_j}\,e^{-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{N}\overline{a_j}\int_{-\infty}^{0}(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)^{\alpha_j}\,e^{-\sigma\,(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,dy.
\end{aligned} \tag{6.160}$$

ここで $v := \sigma^{\frac{1}{2}} y,\ dy = \sigma^{-\frac{1}{2}} dv$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} (\xi_0 + \sqrt{-1}\, y)^{\alpha_j}\, e^{-\sigma\,(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\, dy &= \int_0^{\infty} (\xi_0 + \sqrt{-1}\, y)^{\alpha_j}\, e^{-(\sigma^{\frac{1}{2}}\, y - 1)^2}\, dy \\ &= \sigma^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (\xi_0 + \sqrt{-1}\, \sigma^{-\frac{1}{2}}\, v)^{\alpha_j}\, e^{-(v-1)^2}\, dv \\ &= \sigma^{-\frac{1}{2}(\alpha_j+1)} \int_0^{\infty} (\sigma^{\frac{1}{2}}\, \xi_0 + \sqrt{-1}\, v)^{\alpha_j}\, e^{-(v-1)^2}\, dv.\end{aligned} \tag{6.161}$$

同様に次を得る.

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0} (\xi_0 + \sqrt{-1}\, y)^{\alpha_j}\, e^{-\sigma\,(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\, dy \\ &\qquad = \sigma^{-\frac{1}{2}(\alpha_j+1)} \int_0^{\infty} (\sigma^{\frac{1}{2}}\, \xi_0 - \sqrt{-1}\, v)^{\alpha_j}\, e^{-(v+1)^2}\, dv.\end{aligned} \tag{6.162}$$

ここで (6.161) と (6.162) それぞれの右辺の積分において, $\sigma \to 0$ とすると,

$$\int_0^{\infty} (\sigma^{\frac{1}{2}}\xi_0 + \sqrt{-1}\sigma^{-\frac{1}{2}} v)^{\alpha_j} e^{-(v-1)^2} dv = e^{\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}\alpha_j} \int_0^{\infty} v^{\alpha_j} e^{-(v-1)^2} dv + O(1),$$

$$\int_0^{\infty} (\sigma^{\frac{1}{2}}\xi_0 - \sqrt{-1}\,\sigma^{-\frac{1}{2}} v)^{\alpha_j} e^{-(v+1)^2} dv = e^{-\sqrt{-1}\frac{\pi}{2}\alpha_j} \int_0^{\infty} v^{\alpha_j} e^{-(v+1)^2} dv + O(1).$$

したがって,

$$\begin{aligned} h := a_N\, e^{\sqrt{-1}\,\alpha_N\,\frac{\pi}{2}} &\int_0^{\infty} v^{\alpha_N}\, e^{-(v-1)^2}\, dv \\ &+ \overline{a_N}\, e^{-\sqrt{-1}\,\alpha_N\,\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} v^{\alpha_N}\, e^{-(v+1)^2}\, dv \end{aligned}$$

とおき, $\sigma \to 0$ とすると,

$$\widehat{Q}(\sigma, 0) = h\, \sigma^{-\frac{1}{2}\,(\alpha_N+1)} + o(\sigma^{-\frac{1}{2}\,(\alpha_N+1)}) \tag{6.163}$$

が得られる. 更に, $a_N \neq 0$ のとき, $h \neq 0$ かつ $\widehat{Q}(\sigma, t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ とすると,

$\alpha_N = 0$ でなければならず，これは仮定 $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ に矛盾する．よって $a_N = 0$ とならねばならない．こうして次々に，$a_1 = \cdots = a_N = 0$ を得るので，結局，$Q \equiv 0$ となる．□

6.5 主定理

本節では，前節の結果を用いて，コラン＝ド＝ヴェルディエの結果を述べる．

定理 6.21 （コラン＝ド＝ヴェルディエ） コンパクト・リーマン多様体 (M, g) が定義 6.3 における性質 (P_2) をもつとする．閉測地線の長さの集合を

$$\mathcal{L} := \{L(\gamma) : \gamma \in \mathrm{Geo}(M, g)\} = \{L_p : p = 0, 1, \ldots\} \qquad (L_0 := 0) \quad (6.164)$$

とする．(M, g) のラプラス作用素 Δ_g の固有値を重複度を込めて並べた集合（(M, g) の Δ_g のスペクトル）を $\mathrm{Spec}(M, g) = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots\}$ とし，複素熱方程式の基本解のトレース $Z(z) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i z}$ について，

$$\widetilde{Z}(z) := \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_i}{z}}, \qquad (z \in \mathbb{C}^+) \tag{6.165}$$

とおく．このとき次の等式が成立する：

$$\widetilde{Z}(z) =_F \mathrm{Vol}(M, g) \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi\, j_{L_p}}{2}} \, z^{\frac{1}{2}} \, e^{-\frac{z\, L_p{}^2}{4}}. \tag{6.166}$$

ここで等式 (6.166) の意味は定義 6.17 による．$n = \dim M$, 正定数 a_p ($p = 1, 2, \ldots$) は (6.133) のもので，j_{L_p} ($p = 1, 2, \ldots$) は注意 6.4 (2) を見よ．

系 6.22 （コラン＝ド＝ヴェルディエ） 2 つのコンパクト・リーマン多様体 (M, g), (M', g') がどちらも性質 (P_2) をもつとする．それぞれのラプラス作用素のスペクトルを $\mathrm{Spec}(M, g)$, $\mathrm{Spec}(M', g')$, 閉測地線の長さの集合を $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ とする．

このとき，もし $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$ ならば，$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ が成り立つ．

定理 6.23 （コラン＝ド＝ヴェルディエ）　コンパクト・リーマン多様体 (M, g) が性質 (P_1) をもつとする．(M, g) の閉測地線の長さの集合を $\mathcal{L} = \{L_p : p = 0, 1, \ldots\}$ とする．このとき，任意の非負実数 $\alpha \geq 0$ に対して，

$$\widetilde{Z}(z) =_{F_\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} f_p^\alpha(z)\, e^{-\frac{z\, L_p{}^2}{4}} \tag{6.167}$$

が成り立つ．等式の意味は定義 6.17 (2) を見よ．ここで $f_p^\alpha(z)$ は次のような関数で，T_α 型である．各 $L_p \in \mathcal{L}$ に対して，L_p に値をもつエネルギー E の臨界点の集合を $\bigcup_{\lambda=1}^{\Lambda} W_\lambda$ とする（このとき，各 W_λ は指標 j_λ, 退化次数 n_λ の非退化臨界部分多様体であることに注意）．このとき，(6.167) 式の係数に現れる関数 $f_p^\alpha(z)$ は次の形をしている．

$$f_p^\alpha(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} P_\lambda^\alpha(z), \tag{6.168}$$

ここで $P_\lambda^\alpha(z)$ は次の形の関数である．

$$P_\lambda^\alpha(z) = \begin{cases} e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi\, j_\lambda}{2}} \left(a_0\, z^{\frac{n_\lambda+1}{2}} + a_1\, z^{\frac{n_\lambda-1}{2}} + \cdots + a_\ell\, z^{n_0}\right) & (\mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ のとき}) \\ \overline{P_\lambda^\alpha(\overline{z})} & (\mathrm{Im}(z) < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.169}$$

(6.169) の係数は (6.166) のものとは必ずしも一致しない．$a_0 > 0$,

$$n_0 := \min\left\{ \frac{n_\lambda + 1}{2} - m > -\alpha \,\middle|\, m \in \mathbb{N} \right\}$$

であり，a_ℓ は z^{n_0} に現れる係数である．

$L_0 = 0$ に対しては，$\Lambda = 1$, $j_\Lambda = 0$, $n_\lambda + 1 = n$ $(n = \dim M)$．この場合，$a_0 = \mathrm{Vol}(M, g)\,(4\pi)^{-\frac{n}{2}}$ である．

系 6.22 は定理 6.21 より直ちに従い，定理 6.21 は定理 6.23 から直ちに得られる．

注意 6.24 (1) (M,g) が性質 (P_1) を満たすとき，定理 6.23 だけから一般に，$\mathcal{L}$ を $\mathrm{Spec}(M,g)$ から決定することはできない．なぜなら，ある $L\in\mathcal{L}$ において，退化次数が 0 だが，指標が 2 だけ異なる 2 つの閉測地線だけをもつ場合には，$e^{-\frac{zL^2}{4}}$ の項が互いに打ち消し合って現れない可能性が生ずるからである．

(2) 2 つのコンパクト・リーマン多様体 $(M_1,g_1),(M_2,g_2)$ で，$\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2$ であるが，$\mathrm{Spec}(M_1,g_1)\neq\mathrm{Spec}(M_2,g_2)$ となる例としては次のようなものがある．2 次元球面 S^2 上には，すべての測地線が閉測地線でその長さが 2π となるリーマン計量として，定曲率 1 の標準リーマン計量 g_0 の他に，g_0 と等長的でないリーマン計量 $g_{2\pi}$ の存在が知られている（ツォル **(Zoll)** 計量と呼ばれている）．(S^2,g_0) については，$\mathrm{Spec}(M,g)=\mathrm{Spec}(S^2,g_0)$ ならば，(M,g) は (S^2,g_0) と等長的であることが知られている．したがって，$(S^2,g_{2\pi})$ は上の例を与えている．

6.6 複素熱方程式の基本解のもつ性質

本節以降 4 つの節によって，定理 6.23 の証明を与える．本節では，定理 6.13 における複素熱方程式の基本解 $\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}K_k^{*\ell}*H_k$ を整理して評価しやすい形に直す作業を行う．本節の主結果は (6.179), (6.180), (6.182) などの公式である．

$K_k^{*\ell}*H_k$ の定義を思い起こそう．$x,\ y\in M,\ z\in\mathbb{C}^+$ に対して，(6.113) のように，

$$\begin{aligned}(A*B)(x,y,z)&=\int_0^z\int_M A(x,q,w)\,B(q,y,z-w)\,v_g(q)\,dw\\&=z\int_I\int_M A(x,q,z\,\theta)\,B(q,y,z\,(1-\theta))\,v_g(q)\,d\theta\\&=z\int_{M\times X_2}A(x,x_1,z\,u_0)\,B(x_1,y,z\,u_1)\,v_1(x_1)\,\mu_2(u_0),\end{aligned}\tag{6.170}$$

ここで 6.2.3 項の X_d の定義を思い起こそう．$v_1(x_1):=v_g(x_1)$, $X_2:=\{(u_0,u_1)\in I\times I|\,u_0+u_1=1\}$ は図 6.1 の 1 次元単体であり，$\mu_2(u_0)$ は $I\ni u_0\mapsto(u_0,u_1)\in X_1$ $(u_1=1-u_0)$ によって I 上の全体積 1 のルベーグ測度から誘導される 1 次元単体 X_2 上の全体積 1 の測度である．

次に，(6.170) を使い，

$$(A*B*C)(x,y,z) = z\int_I\int_M (A*B)(x,x_2,z\,\widetilde{u_1})\,C(x_2,y,z\,u_2)\,v_2(x_2)\,d\widetilde{u_1}$$

（$v_2(x_2) := v_g(x_2)$, $d\widetilde{u_1}$ は I 上のルベーグ測度，$u_2 := 1-\widetilde{u_1}$）

$$= z\int_I\int_M (z\,\widetilde{u_1})\int_I\int_M A(x,x_1,z\,\widetilde{u_1}\,w_0)\,B(x_1,x_2,z\,\widetilde{u_1}\,(1-w_0))$$
$$\times C(x_2,y,z\,u_2)\,v_1(x_1)\,v_2(x_2)\,d\widetilde{u_1}\,dw_0$$

$$= z^2\int_{M^2} v_1(x_1)\,v_2(x_2)\left[\int_{I\times I} A(x,x_1,z\,\widetilde{u_1}\,w_0)\,B(x_1,x_2,z\,\widetilde{u_1}\,(1-w_0))\right.$$
$$\left.\times C(x_2,y,z\,u_2)\,\widetilde{u_1}\,d\widetilde{u_1}\,dw_0\right]. \tag{6.171}$$

ここで $u_0 := \widetilde{u_1}\,w_0$, $u_1 := \widetilde{u_1} - u_0 = \widetilde{u_1}(1-w_0)$ とおく．$u_2 = 1-u_0-u_1 = 1-\widetilde{u_1}$ であったので，$I\times I \ni (\widetilde{u_1},w_0)\mapsto(u_0,u_1,u_2)\in X_3$ は微分同相で，$\widetilde{u_1}\,d\widetilde{u_1}\,dw_0 = du_0\,du_1$ となる．実際，

$$du_0\,du_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial \widetilde{u_1}} & \frac{\partial u_0}{\partial w_0} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \widetilde{u_1}} & \frac{\partial u_1}{\partial w_0} \end{vmatrix} d\widetilde{u_1}\,dw_0 = \begin{vmatrix} w_0 & \widetilde{u_1} \\ 1-w_0 & -\widetilde{u_1} \end{vmatrix} d\widetilde{u_1}\,dw_0 = \widetilde{u_1}\,d\widetilde{u_1}\,dw_0$$

となるからである．したがって，

$$(6.171) = z^2\int_{M^2\times X_3} A(x,x_1,zu_0)B(x_1,x_2,zu_1)C(x_2,y,zu_2)v_1(x_1)v_2(x_2)\mu_3 \tag{6.172}$$

ここで $\mu_3 := du_0\,du_1$ であり，

$$\int_{X_3}\mu_3 = \int_{\{0\le u_0\le 1,\,0\le u_1\le 1,\,0\le u_0+u_1\le 1\}} du_0\,du_1 = \int_0^1 du_0\int_0^{1-u_0} du_1 = \frac{1}{2}$$

である．帰納法によって，

$$(K_k^{*\ell} * H_k)(x,y,z) = z^n\int_{M^\ell\times X_{\ell+1}} K_k(x,x_1,z\,u_0)\cdots K_k(x_{\ell-1},x_\ell,z\,u_{\ell-1})$$
$$\times H_k(x_\ell,y,z\,u_\ell)\,\lambda_\ell \tag{6.173}$$

を得る．ここで

$$\begin{cases} \lambda_\ell := v_1(x_1)\cdots v_\ell(x_\ell)\,\mu_{\ell+1} \\ \mu_{\ell+1} := du_0\cdots du_{\ell-1} \\ \text{とおくと，} \\ \displaystyle\int_{X_{\ell+1}} \mu_{\ell+1} = \int_{0\le u_i\le 1,\, 0\le u_0+\cdots+u_{\ell-1}\le 1} du_0\cdots du_{\ell-1} \\ \displaystyle\qquad = \int_0^1 du_0 \int_0^{1-u_0} du_1 \cdots \int_0^{1-u_0-\cdots-u_{\ell-2}} du_{\ell-1} = \frac{1}{\ell\,!} \end{cases} \tag{6.174}$$

である．さらに，K_k, H_k の作り方 (命題 6.11) より，

$$({K_k}^{*\,\ell} * H_k)(x_0, x_{\ell+1}, z) = \int_{M^\ell\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{1}{4z}\sum_{i=0}^{\ell}\frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}}\, P_\ell^k((x_i), U, z^{-1})\,\lambda_\ell \tag{6.175}$$

を得る．ここで $P_\ell^k((x_i), U, z)$ は次のように与えられていた：

$$P_\ell^k((x_i), U, z) := z^{-\ell} \prod_{i=0}^{\ell-1}\left[\left(\frac{z}{4\pi\, u_i}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=-1}^{k} V_j(x_i, x_{i+1})\left(\frac{u_i}{z}\right)^j\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{z}{4\pi\, u_\ell}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{k} U_j(x_\ell, x_{\ell+1})\left(\frac{u_\ell}{z}\right)^j\right] \tag{6.176}$$

（ただし $n=\dim M$）$P_\ell^k((x_i), U, z)$ を $z^{\frac{1}{2}}$ の負冪も含む多項式として，

$$P_\ell^k((x_i), U, z) = \sum_{s=s_0}^{\frac{\ell+1}{2}n} P_{\ell,\,s}^k(U, (x_i))z^s \tag{6.177}$$

と表示する．ここで $2\,s_0\in\mathbb{Z}$ であり，s は $2s\in\mathbb{Z}$ を動くものとする．P_ℓ^k の最高次の次数は $\frac{\ell+1}{2}\,n$ であり，この時の係数は

$$P_{\ell,\,\frac{\ell+1}{2}n}^k(U, (x_i)) = \left[\prod_{i=0}^{\ell-1}\frac{V_{-1}(x_i, x_{i+1})}{u_i\,(4\pi\, u_i)^{\frac{n}{2}}}\right]\frac{U_0(x_\ell, x_{\ell+1})}{(4\pi\, u_\ell)^{\frac{n}{2}}} \tag{6.178}$$

である．また，(6.52) より，

$$E_U((x_i)) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}.$$

$M^{\ell+1} \times X_{\ell+1}$ 上の測度 $\widetilde{\lambda_{\ell+1}}$ は $\widetilde{\lambda_{\ell+1}} := v_0(x_0) \cdots v_\ell(x_\ell)\, \mu_{\ell+1}$ と与えられているので，結局，

$$\widetilde{Z}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \int_M (K_k{}^{*\,\ell} * H_k)\left(x_0, x_{\ell+1}, \frac{1}{z}\right) v_g(x_0) \qquad (x_{\ell+1} = x_0)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \int_{M^{\ell+1} \times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4} E_U((x_i))} P_\ell^k((x_i), U, z)\, \widetilde{\lambda_{\ell+1}} \tag{6.179}$$

を得る．

命題 6.11 より，$\mathrm{supp}(U_i)$, $\mathrm{supp}(V_i) \subset \{(p,q) \in M^2 | \overline{pq} < \rho_1\}$ (ただし $0 < \rho_0 < \rho_1 < \mathrm{inj}$) である．したがって，

$$\widetilde{Z}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \int_{M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4} E_U((x_i))} P_\ell^k((x_i), U, z)\, \widetilde{\lambda_{\ell+1}} \tag{6.180}$$

を得る．ここで

$$M_0^{\ell+1} := \{(x_0, x_1, \ldots, x_\ell) \in M^{\ell+1} | \overline{x_i x_{i+1}} < \mathrm{inj}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, \ell,\ \ \text{ただし } x_{\ell+1} = x_0)\} \tag{6.181}$$

とする．

以下，これら (6.180), (6.181) を基にして，$\widehat{\widehat{Z}}(\sigma, t)$ を計算する．

さて

$$P_\ell^k = \sum_{s=s_0}^{\frac{\ell+1}{2} n} P_{\ell,\,s}^k\, z^s$$

に対して，次のように定める：

$$P_\ell^k = P_\ell^{k\,+} + P_\ell^{k\,-},$$

$$P_\ell^{k\,+} := \sum_{s \geq 0} P_{\ell,\,s}^k\, z^s, \qquad P_\ell^{k\,-} := \sum_{s < 0} P_{\ell,\,s}^k\, z^s,$$

$$D_\ell^+(z) := \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4}E_U((x_i))}\, P_\ell^{k\,+}((x_i),U,z)\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}},$$

$$D_\ell^-(z) := \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4}E_U((x_i))}\, P_\ell^{k\,-}((x_i),U,z)\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}},$$

$$I_\ell^\pm(\sigma,t) := \widehat{D_\ell^\pm}(\sigma,t),$$

とおく．このとき定義より，

$$\hat{\hat{Z}}(\sigma,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(I_\ell^+(\sigma,t)+I_\ell^-(\sigma,t)) \tag{6.182}$$

である．これらの定義がうまくいっていることは次の 3 つの命題からわかる．ここで $F(x,y,z)$ は (6.123) で定義された複素熱方程式の基本解である．

命題 6.25　$k>\frac{n}{2}$ $(n=\dim M)$, $\mathrm{Re}(z)=\xi_0>0$（固定），$|P_\ell^k|((x_i),U,z) := \sum_{s=s_0}^{\frac{\ell+1}{2}n}\left|P_{\ell,s}^k((x_i),U)\right||z|^s$ とする．このとき，ℓ に依存しない正定数 $C_1>0$, $C_2>0$ で次を満たすものが存在する：

$$\int_{M_0^\ell\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i))}\,|P_\ell^k|((x_i),U,z)\,\lambda_\ell \le C_1\,{C_2}^\ell\,\frac{|z|^{\frac{\ell+1}{2}n}}{(\ell\,(k-[\frac{n}{2}]))\,!} \tag{6.183}$$

命題 6.26　$\xi_0>0$ に対し，$\mathbb{C}_{\xi_0} := \{z\in\mathbb{C}|\,\mathrm{Re}(z)\ge\xi_0\}$ とする．このとき，任意の $\xi_0>0$ と $\alpha>0$ に対して，正定数 $C>0$, $C'>0$ を選び，

$$\left|F\left(x,y,\frac{1}{z}\right)\right| \le C\,|z|^{\frac{n}{2}}\,e^{C'|z|^\alpha} \qquad (\forall\ z\in\mathbb{C}_{\xi_0}) \tag{6.184}$$

が成り立つ．

命題 6.27　$\widetilde{Z}(z) := \int_M F(x,x,\frac{1}{z})\,v_g(x)$ は $z\to\infty$ のとき，指数関数的に有界であり (定義 6.15), かつ，$\hat{\hat{Z}}(\sigma,t)$ の積分 ((6.142) 参照) は絶対収束し，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}|I_\ell^-(\sigma,t)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.185}$$

が成り立つ．

証明 （命題 6.27 の証明）命題 6.25, 6.26 の下に示す．$|z|^{\frac{n}{2}} \le C''\, e^{C'\,|z|}$, $(z \in \mathbb{C}_{\xi_0})$ が成り立つので，命題 6.26 において $\alpha = 1$ とおいて，

$$\left| F\left(x, y, \frac{1}{z}\right) \right| \le C'''\, e^{2\,C'\,|z|} \qquad (\forall\ z \in \mathbb{C}_{\xi_0})$$

を得る．これから $\widetilde{Z}(z)$ は指数関数的に有界であることがわかる．

後半については，補題 6.20 (2) (c) と命題 6.25 を使うと，

$$\begin{aligned} |I_\ell^-(\sigma, t)| &= |\widehat{D_\ell^-}(\sigma, t)| \le \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} |D_\ell^-|(\xi_0) \\ &= \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{M_0^\ell \times X_{\ell+1}} e^{-\frac{\xi_0}{4}\, E_U((x_i))}\, |P_\ell^{k\,-}|((x_i), U, \xi_0)\, \lambda_\ell \\ &\le \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} C_1\, {C_2}^\ell\, \frac{{\xi_0}^{\frac{\ell+1}{2}\,n}}{(\ell\,(k - [\frac{n}{2}]))\,!} \end{aligned} \tag{6.186}$$

を得る．よって，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |I_\ell^-(\sigma, t)| \le \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} {C_2}^\ell\, \frac{{\xi_0}^{\frac{\ell+1}{2}\,n}}{(\ell\,(k - [\frac{n}{2}]))\,!} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{6.187}$$

この (6.187) は求める (6.185) である．□

証明 （命題 6.26 の証明）命題 6.25 における $k > \frac{n}{2}$ を，$k - [\frac{n}{2}] > [\frac{n}{2\alpha}] + 1 > [\frac{n}{2\alpha}]$ が成り立つように十分大に取っておく（ここで正数 $x > 0$ に対して，$[x]$ は x の整数部分を表す）．このとき，(6.179) と命題6.25 により，

$$\left| F\left(x, y, \frac{1}{z}\right) \right| \le C_1\, |z|^{\frac{n}{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} {C_2}^\ell\, \frac{|z|^{\frac{\ell}{2}\,n}}{(\ell\,(k - [\frac{n}{2}]))\,!} \tag{6.188}$$

となる．ここで (1) $|z| \ge 1$ と (2) $|z| \le 1$ の場合に分けて (6.188) の右辺の評価を行う．

(1) $|z| \geq 1$ のとき．$m := \ell\left([\frac{n}{2\alpha}]+1\right)$ とおくと，

$$C_2{}^{\ell}\,\frac{|z|^{\frac{\ell}{2}\,n}}{\left(\ell\,(k-[\frac{n}{2}])\right)!} \leq C_2{}^{\ell}\,\frac{|z|^{\frac{\ell}{2}\,n}}{\left(\ell\,([\frac{n}{2\alpha}]+1)\right)!}$$

$$= C_2{}^{\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]+1}}\,|z|^{\frac{n}{2}\,\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]+1}}\cdot\frac{1}{m!} \tag{6.189}$$

$\frac{n}{2}\,\frac{1}{[\frac{n}{2\alpha}]+1} \leq \alpha$ かつ $|z| \geq 1$ より，

$$|z|^{\frac{n}{2}\,\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]+1}} = \left(|z|^{\frac{n}{2}\,\frac{1}{[\frac{n}{2\alpha}]+1}}\right)^m \leq \left(|z|^{\alpha}\right)^m \tag{6.190}$$

となる．したがって (6.190) を (6.189) の右辺に代入して，(6.188) は

$$\left|F\left(x,y,\frac{1}{z}\right)\right| \leq C_1\,|z|^{\frac{n}{2}}\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(C_2{}^{\frac{1}{[\frac{n}{2\alpha}]+1}}\,|z|^{\alpha}\right)^m}{m!} \leq C_1\,|z|^{\frac{n}{2}}\,e^{C'\,|z|^{\alpha}} \tag{6.191}$$

と評価される．

(2) $|z| \leq 1$ のとき，$m := \ell\,[\frac{n}{2\alpha}]$ とおくと，

$$C_2{}^{\ell}\,\frac{|z|^{\frac{\ell}{2}\,n}}{\left(\ell\,(k-[\frac{n}{2}])\right)!} \leq C_2{}^{\ell}\,\frac{|z|^{\frac{\ell}{2}\,n}}{\left(\ell\,[\frac{n}{2\alpha}]\right)!}$$

$$= C_2{}^{\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]}}\,|z|^{\frac{n}{2}\,\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]}}\cdot\frac{1}{m!} \tag{6.192}$$

$\frac{n}{2}\,\frac{1}{[\frac{n}{2\alpha}]} \geq \alpha$ かつ $|z| \leq 1$ より，

$$|z|^{\frac{n}{2}\,\frac{m}{[\frac{n}{2\alpha}]}} \leq \left(|z|^{\alpha}\right)^m \tag{6.193}$$

となる．したがって，(6.193) を (6.192) の右辺に代入して，(6.188) は

$$\left|F\left(x,y,\frac{1}{z}\right)\right| \leq C_1\,|z|^{\frac{n}{2}}\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(C_2{}^{\frac{1}{[\frac{n}{2\alpha}]}}\,|z|^{\alpha}\right)^m}{m!} \leq C_1\,|z|^{\frac{n}{2}}\,e^{C'\,|z|^{\alpha}} \tag{6.194}$$

と評価される．

(6.191) と (6.194) の右辺はどちらも欲しい (6.184) である．□

証明　(命題 6.25 の証明)

(第1段) (6.175) を使い，K_k, H_k の評価を行う．(6.83) と (6.98) より，

$$\left|H_k\left(x, y, \frac{u}{z}\right)\right| \leq \left|4\pi\,\frac{u}{z}\right|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4}\,\frac{\xi_0}{u}\,\overline{xy}^2} \sum_{i=0}^{k} \left|U_i(x,y)\right| \left|\frac{u}{z}\right|^i$$

$$\leq C\,e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2}\,|z|^{\frac{n}{2}}\,u^{-\frac{n}{2}} \tag{6.195}$$

$\mathbb{C}_{\xi_0}$ で考えているので，$|z|$ の最高次の部分のみが問題である．正定数 $C > 0$ は ξ_0 にのみ依存する．一方，K_k については，命題 6.11 と (6.83) より，

$$|K_k|\left(x, y, \frac{u}{z}\right) \leq C_2\,|z|^{\frac{n}{2}+1}\,u^{-\frac{n}{2}+k} \tag{6.196}$$

を得る．

(第2段) 実際，

$$|K_k|\left(x, y, \frac{u}{z}\right) \leq \left|4\pi\,\frac{u}{z}\right|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2} \sum_{i=-1}^{k} \left|V_i(x,y)\right| \left|\frac{u}{z}\right|^i$$

$$\leq C\,|z|^{\frac{n}{2}+1} \left\{ u^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2} \sum_{i=-1}^{k-1} |V_i(x,y)|\,u^i \right.$$

$$\left. + u^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2}\,|V_k(x,y)|\,u^k \right\}. \tag{6.197}$$

(第3段) (6.197) では $|z|$ が最高次となるところで評価した．(6.197) 式の $\{\quad\}$ 内第1項の和については，$\mathrm{supp}(V_i) \subset \{(x,y) \,|\, \rho_0 \leq \overline{xy} \leq \rho_1\}$ $(i = -1, \ldots, k-1)$ なので，特に，$\rho_0 \leq \overline{xy}$ に注意して，$u \to 0$ のとき，$e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2}$ $(\xi_0 > 0)$ のお陰で，どのような u^{-j} $(j > 0)$ との積も零に行く．

ゆえに，

$$e^{-\frac{\xi_0}{4u}\,\overline{xy}^2} \sum_{i=-1}^{k-1} |V_i(x,y)|\,u^i \leq C_1\,u^k \qquad (C_1 > 0 \text{ は正定数})$$

とできる．V_k については問題となるところはない．よって，(6.196) の評価を得る．

（第4段）(6.173) あるいは (6,175) より $x_0 = x$, $x_{\ell+1} = y$ としたものは，

$$\left|((K_k)^{*\ell} * H_k)\left(x, y, \frac{1}{z}\right)\right|$$
$$\leq |z|^{-\ell} \int_{M^\ell \times X_{\ell+1}} |K_k|\left(x_0, x_1, \frac{u_0}{z}\right) \cdots |K_k|\left(x_{\ell-1}, x_\ell, \frac{u_{\ell-1}}{z}\right)$$
$$\times |H_k|\left(x_\ell, x_{\ell+1}, \frac{u_\ell}{z}\right) \lambda_\ell$$
$$= |z|^{-\ell} \int_{M^\ell \times X_{\ell+1}} \prod_{i=0}^{\ell-1} |K_k|\left(x_i, x_{i+1}, \frac{u_i}{z}\right) |H_k|\left(x_\ell, x_{\ell+1}, \frac{u_\ell}{z}\right) \lambda_\ell$$
$$\leq C\, {C_2}^\ell\, |z|^{-\ell} \int_{M^\ell \times X_{\ell+1}} |z|^{(\frac{n}{2}+1)\ell} \left(\prod_{i=0}^{\ell-1} u_i\right)^{-\frac{n}{2}+k} |z|^{\frac{n}{2}}\, {u_\ell}^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{\xi_0}{4}\frac{\overline{x_\ell x_{\ell+1}}^2}{u_\ell}} \lambda_\ell \tag{6.198}$$

となる．ここで，

$$\int_M e^{-\frac{\xi_0}{4}\frac{\overline{x_\ell x_{\ell+1}}^2}{u_\ell}}\, dx_\ell = \int_0^{\mathrm{inj}} e^{-\frac{\xi_0 r^2}{4 u_\ell}}\, r^{n-1}\, dr = \int_0^{\mathrm{inj}} \exp\left(-\frac{\xi_0}{4}\left(\frac{r}{{u_\ell}^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right) r^{n-1}\, dr. \tag{6.199}$$

（第5段）$s := \frac{r}{{u_\ell}^{\frac{1}{2}}}$ と変数変換すると，$r^{n-1}\, dr = {u_\ell}^{\frac{n}{2}}\, s^{n-1}\, ds$ なので，

$$(6.199) = {u_\ell}^{\frac{n}{2}} \int_0^{\mathrm{A}} e^{-\frac{\xi_0}{2}s^2} s^{n-1} ds \leq C' {u_\ell}^{\frac{n}{2}} \left(\mathrm{A} = \frac{\mathrm{inj}}{{u_\ell}^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{6.200}$$

となる．以上より，

$$\left|(((K_k)^{*\ell}) * H_k)\left(x, y, \frac{1}{z}\right)\right| \leq C\, C'\, {C_2}^\ell\, |z|^{\frac{n}{2}(\ell+1)} \int_{X_{\ell+1}} \left(\prod_{i=0}^{\ell-1} u_i\right)^{-\frac{n}{2}+k} \mu_{\ell+1} \tag{6.201}$$

を得る．

（第6段）(6.201) の右辺の積分は次のように評価される：

$$
\begin{aligned}
&\int_{X_{\ell+1}} \left(\prod_{i=0}^{\ell-1} u_i\right)^{-\frac{n}{2}+k} \mu_{\ell+1} \\
&= \int_{0\le u_i \le 1,\, 0 \le \sum_{i=0}^{\ell-1} u_i \le 1} \left(\prod_{i=0}^{\ell-1} u_i\right)^{-\frac{n}{2}+k} du_0 \cdots du_{\ell-1} \\
&= \frac{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)^{\ell}}{\Gamma((k-\frac{n}{2}+1)\,\ell)\,(k-\frac{n}{2}+1)\,\ell} \quad \text{（『岩波 数学公式 I』，p.265）} \\
&= \frac{\Gamma(k-\frac{n}{2}+1)^{\ell}}{\Gamma((k-\frac{n}{2}+1)\,\ell+1)} \\
&\le \frac{C}{(\ell(k-[\frac{n}{2}]))\,!}.
\end{aligned}
\tag{6.202}
$$

ここで正定数 $C>0$ は k と $n=\dim M$ にのみ依存し，ℓ には依らない定数である．最後の評価式ではスターリングの公式を使った．

以上より，(6.183) 式を得て，命題 6.25 を得た．□

6.7　鞍部点法（停留位相法）

当面する問題は

$$
D_\ell^+ := \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4}E_U((x_i))}\,P_\ell^{k\,+}((x_i),U,z)\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}}
$$

の $\mathrm{Im}(z)\to\infty$ ($\mathrm{Re}(z)=\xi_0>0$ は固定) における振る舞いを調べることで，その結果を用いて $I_\ell^+(\sigma,t) := \widehat{D_\ell^+}(\sigma,t)$ を調べることができる．そのことを可能にするのが本節において証明を付けて紹介する**鞍部点法**である．本節は独立した節である．鞍部点法には，数学のいろいろな分野において非常に広汎な応用がある．

さて dv が N 次元 C^∞ 多様体 S 上の N **次元正値測度**であるとは，S 上の局所座標近傍系 $(U_\lambda, x_\lambda^1,\dots,x_\lambda^N)$ $(\lambda\in\Lambda)$ に対して，

$$
dv(x) = \Phi_\lambda(x_\lambda^1,\dots,x_\lambda^N)\,dx_\lambda^1\cdots dx_\lambda^N,
$$

と表示できるときをいう．Φ_λ は U_λ 上の正値 C^∞ 関数であり，$dx_\lambda^1 \cdots dx_\lambda^N$ は U_λ 上のルベーグ測度であるものとする．ただし

$$\Phi_\lambda(x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^N) = \Phi_\mu(x_\mu^1, \ldots, x_\mu^N) \left| \det \left(\frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j} \right) \right| \qquad (U_\lambda \cap U_\mu \text{ 上})$$

を満たすものとする．このとき次の定理が成り立つ．

定理 6.28 **(鞍部点定理)**　S を任意の N 次元 C^∞ 多様体，dv を S 上の N 次元正値測度，$f : S \to \mathbb{R}$ を S 上の C^∞ 実数値関数，$h : S \to \mathbb{C}^+$ を S 上の $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$ に値を取り $\operatorname{supp}(h)$ がコンパクトな C^∞ 関数とする．このとき次が成り立つ．

(1)　f が $\operatorname{supp}(f)$ 内に臨界点をもたないとき，任意の実数 b に対して，z の関数 $z^b \int_S e^{-z\, f(x)}\, h(x)\, dv(x)$ は $\operatorname{Im}(z) \to \infty$ のとき，有界である．ただし $\operatorname{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定する．

(2)　W を f の $\operatorname{supp}(h)$ 内の臨界点の集合とし，W が w 次元，指標 j_W の f の非退化臨界部分多様体になっているとする（6.2.1 項参照）．$f(W)$ をその臨界値とする．このとき，各非負整数 $K \geq 0$ に対して，

$$\int_S e^{-z\, f(x)}\, h(x)\, dv(x) = \left(\frac{2\pi}{z} \right)^{\frac{N-w}{2}} e^{\sqrt{-1}\, \frac{\pi\, j_W}{2} - z\, f(W)} \times \left(\sum_{k=0}^{K} a_k\, z^{-k} + r_K(z)\, z^{-K} \right) \qquad (6.203)$$

が成り立つ．a_k $(k = 0, 1, \ldots, K)$ は z に依らない定数である．$\operatorname{Im}(z) \to \infty$ のとき（ただし $\operatorname{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定），$r_K \to 0$ である．更に，W 上 $h > 0$ のとき，$a_0 > 0$ となる．

証明　(1) $\operatorname{supp}(h)$ 内に f の臨界点が存在しないので，S の座標近傍系 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ として，$U_\lambda \cap \operatorname{supp}(h) \neq \emptyset$ のとき，$\{x \in U_\lambda | f(x) = t\}$ は空集合かまたは S の $N-1$ 次元部分多様体となるようにできる．さらにこの U_λ 上の座標近傍系 $(x_\lambda^1, \ldots, x_\lambda^N)$ として，$x_\lambda^N(x) = f(x)$ $(x \in U_\lambda)$ かつ

$(x_\lambda^1, \ldots, x^{N-1})$ が $\{x \in S | f(x) = \text{定数}\}$ の座標系を与えるものとする．さらに，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対応する 1 の分解を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とし，

$$f(\mathrm{supp}(h)) \subset [\alpha, \beta], \quad \Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda |\, U_\lambda \cap \mathrm{supp}(h) \neq \emptyset\}$$

とする．

$$u(t) := \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \int_{\{x \in U_\lambda |\, f(x) = t\}} h\, \varphi_\lambda\, \Phi_\lambda\, dx_\lambda^1 \cdots dx_\lambda^{N-1} \tag{6.204}$$

とおくとき，

$$\begin{aligned} z^b \int_S e^{z\, f(x)}\, h(x)\, dv(x) &= z^b \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \int_{U_\lambda} e^{-z\, f(x)}\, h\, \varphi_\lambda\, \Phi_\lambda\, dx_\lambda^1 \cdots dx_\lambda^N \\ &= z^b \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{\{x \in U_\lambda |\, f(x) = t\}} e^{-z\, t}\, h\, \varphi_\lambda\, \Phi_\lambda\, dx_\lambda^1 \cdots dx_\lambda^{N-1} \right\} dt \\ &= z^b \int_\alpha^\beta e^{-z\, t}\, u(t)\, dt \end{aligned} \tag{6.205}$$

が成り立つ．ここで $f(\mathrm{supp}(h)) \subset [\alpha, \beta]$ より，$u(t)$ は $\mathrm{supp}(u) \subset [\alpha, \beta]$ となる C^∞ 関数なので，

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta u(t)\, e^{-z\, t}\, dt &= \left[u(t)\, \frac{e^{-z\, t}}{-z} \right]_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_\alpha^\beta u'(t)\, \frac{e^{-z\, t}}{-z}\, dt \\ &= \frac{1}{z} \int_\alpha^\beta u'(t)\, e^{-z\, t}\, dt \\ &= \cdots \\ &= z^{-m} \int_\alpha^\beta u^{(m)}(t)\, e^{-z\, t}\, dt \end{aligned} \tag{6.206}$$

となる（ここで $u^{(m)}$ は m 階微分を表す）．したがって，$m > b$ に対して，(6.206) より，

$$z^b \int_S e^{-z\, f(x)}\, h(x)\, dv(x) = z^{b-m} \int_\alpha^\beta u^{(m)}(t)\, e^{-z\, t}\, dt \tag{6.207}$$

なので，この両辺の絶対値を取ると，

$$\left| z^b \int_S e^{-z\,f(x)}\,h(x)\,dv(x) \right| \leq |z|^{b-m} \int_\alpha^\beta \left| u^{(m)}(t) \right| e^{-\xi_0\,t}\,dt \tag{6.208}$$

となる．したがって，(6.208) は $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ ($\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定) のとき，有界となる．

(2)　$S \supset W$ を関数 f の w 次元非退化臨界部分多様体とする．このときモースの補題によって，S の局所座標近傍系 U_λ ($\lambda \in \Lambda$) として，微分同相 $\psi_\lambda : U_\lambda \to \psi_\lambda(U_\lambda) \subset (\mathbb{R}^N, (x_1, \ldots, x_N))$ として，

$$f \circ {\psi_\lambda}^{-1}(x_1, \ldots, x_N) = f(W) - {x_1}^2 - \cdots - {x_{j_W}}^2 + {x_{j_W+1}}^2 + \cdots + {x_{N-w}}^2$$

を満たし，かつ，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \cap W = \{x \in U_\lambda |\, x_i \circ \psi(x) = 0\ (i = N - w + 1, \ldots, N)\}$ か，または $U_\lambda \cap W = \emptyset$ となるものが取れる．さらに $\{\varphi_\lambda |\, \lambda \in \Lambda\}$ を開被覆 $\{U_\lambda |\, \lambda \in \Lambda\}$ に対する 1 の分解とする．ここで $\mathrm{supp}(h)$ がコンパクトなので，$\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda |\, U_\lambda \cap \mathrm{supp}(h) \neq \emptyset\}$ は有限集合としてよい．

このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_S e^{-z\,f(x)}\,h(x)\,dv(x) &= \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \int_{U_\lambda} e^{-z\,f(x)}\,\varphi_\lambda(x)\,h(x)\,dv(x) \\ &= e^{-z\,f(W)} \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \int_{\psi_\lambda(U_\lambda)} e^{z\{{x_1}^2 + \cdots + {x_{j_W}}^2 - {x_{j_W+1}}^2 - \cdots - {x_{N-w}}^2\}} \\ &\qquad \times (\varphi_\lambda \cdot h) \circ {\psi_\lambda}^{-1}\,\Phi_\lambda\,dx_1 \cdots dx_N.\end{aligned} \tag{6.209}$$

$\mathrm{supp}((\varphi_\lambda \cdot h) \circ {\psi_\lambda}^{-1}) \subset \psi_\lambda(U_\lambda)$ なので，$(\varphi_\lambda \cdot h) \circ {\psi_\lambda}^{-1})$ と Ψ_λ をそれぞれ $\psi_\lambda(U_\lambda)$ の外では 0 となるよう $\mathbb{R}^N$ 全体に C^∞ に拡張しておくと，

$$\begin{aligned}(6.209) \text{ の右辺} = e^{-z\,f(W)} &\int_{\mathbb{R}^N} e^{z\{{x_1}^2 + \cdots + {x_{j_W}}^2 - {x_{j_W+1}}^2 - \cdots - {x_{N-w}}^2\}} \\ &\times H(x_1, \ldots, x_N)\,dx_1 \cdots dx_N\end{aligned} \tag{6.210}$$

となる．ここで

$$H(x_1, \ldots, x_N) := \sum_{\lambda \in \Lambda_0} (\varphi_\lambda \cdot h) \circ {\psi_\lambda}^{-1}(x_1, \ldots, x_N)\,\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_N) \tag{6.211}$$

はコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^N$ 上の C^∞ 関数である．したがって，(6.210) の右辺は次のようになる．

$$\int_S e^{-z\,f(x)}\,h(x)\,dv(x) = e^{-z\,f(W)} \int_{\mathbb{R}^{N-w}} e^{z\{{x_1}^2+\cdots+{x_{j_W}}^2-{x_{j_W+1}}^2-\cdots-{x_{N-w}}^2\}} \times \widetilde{H}(x_{N-w+1},\ldots,x_N)\,dx_{N-w+1}\cdots dx_N \tag{6.212}$$

一方で

$$\widetilde{H}(x_{N-w+1},\ldots,x_N) := \int_{\mathbb{R}^w} H(x_1,\ldots,x_N)\,dx_1\,\cdots\,dx_w \tag{6.213}$$

であり，$\widetilde{H}$ も $\mathbb{R}^{N-w}$ 上コンパクトな台をもつ C^∞ 関数である．

以上の準備の下に，定理 6.28 (2) の証明を行うには次の補題が必要である．証明は後で行う．

補題 6.29 $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^+$ をコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数とする．このとき，任意の非負整数 $K \geq 0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{z({x_1}^2+\cdots+{x_j}^2)-{x_{j+1}}^2-\cdots-{x_n}^2}\,h(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\sqrt{-1}\frac{\pi j}{2}} \left(h(0)+\sum_{k=1}^{K} a_k\,z^{-k} + r_K(z)\,z^{-k}\right) \tag{6.214}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ のとき（ただし $\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定），$r_K(z) \to 0$ である．

（定理 6.28 (2) の証明の続き） 補題 6.29 を (6.212) に適用するとよい．実際，

$$\int_S e^{-z\,f(x)}\,h(x)\,dv(x) = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{N-w}{2}} e^{\{\sqrt{-1}\frac{\pi j_W}{2} - z\,f(W)\}} \times \left(\sum_{k=0}^{K} a_k\,z^{-k} + r_K(z)\,z^{-K}\right) \tag{6.215}$$

ここで $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ のとき（ただし $\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定），$r_K(z) \to 0$ となる．

さらに，$W \cap U_\lambda = \{x \in U_\lambda \,|\, x_i \circ \psi_\lambda = 0\,(i = N-w+1, \ldots, N)\}$ なので，

$$a_0 = \widetilde{H}(0, \ldots, 0)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^w} \sum_{\lambda \in \Lambda_0} (\varphi_\lambda \cdot h) \circ {\psi_\lambda}^{-1}(x_1, \ldots, x_w, 0, \ldots, 0)\, dx_1 \cdots dx_w \tag{6.216}$$

であり，$h > 0$ (W 上) とすると，(6.216) の右辺は正，したがって $a_0 > 0$ となる．定理 6.28 を得た．□

補題 6.29 の証明には次の 2 つの更なる補題が必要である．

補題 6.30 $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 関数 φ が 0 の近傍上で 1 であるとする．このとき，非負整数 $m \geq 0$ に対して，次の 2 つが成立する：

$$\int_{\mathbb{R}} t^m\, e^{-z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = \varepsilon\, \Gamma\!\left(\frac{m+1}{2}\right) z^{-\frac{m+1}{2}} + O\big(|z|^{-\frac{m+1}{2}-1}\big) \tag{6.217}$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^m\, e^{z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = \varepsilon\, \Gamma\!\left(\frac{m+1}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi(m+1)}{2}}\, z^{-\frac{m+1}{2}} + O\big(|z|^{-\frac{m+1}{2}-1}\big) \tag{6.218}$$

が $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ のとき（ただし $\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定）成り立つ．ここで $\varepsilon = 1$ (m 偶数), $\varepsilon = -1$ (m 奇数) である．

補題 6.31 非負整数 $K \geq 0$ に対して，ψ を $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 関数で，$2K-1$ 次以下の 0 での偏微分係数がすべて零であるとする．このとき，$\mathrm{Im}(z) \to \infty$ とすると（ただし $\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ は固定），次が成り立つ：

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{z({x_1}^2 + \cdots + {x_j}^2 - {x_{j+1}}^2 - \cdots - {x_n}^2)}\, \psi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = O(|z|^{-K}). \tag{6.219}$$

証明 まず，2 つの補題 6.30, 6.31 の下に，補題 6.29 を示す．その後で，これらの 2 つの補題の証明を行う．

（第1段）非負整数 $K \geq 0$ に対して，コンパクトな台をもつ C^∞ 関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^+$ を次のように分解する．

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\, P(x_1, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_n) \qquad (6.220)$$

φ はコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数で，0 の近傍上で 1 となるものとし，$P(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ の $2K$ 次の多項式とし，ψ は $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 関数で，$2K+1$ 次の原点 0 でのすべての偏微分係数が零であるものとする．

（第2段）$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq 2K} a_{i_1 \cdots i_n}\, {x_1}^{i_1} \cdots {x_n}^{i_n}$ とおくと，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{z({x_1}^2 + \cdots + {x_j}^2 - {x_{j+1}}^2 - \cdots - {x_n}^2)}\, h\, dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq 2K} \prod_{k=1}^{j} \int_{\mathbb{R}} e^{z\, {x_k}^2}\, {x_k}^{i_k}\, \varphi(x_k)\, dx_k \times \prod_{\ell = j+1}^{n} e^{-z\, {x_\ell}^2}\, {x_\ell}^{i_\ell}\, \varphi(x_\ell)\, dx_\ell \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} e^{z({x_1}^2 + \cdots + {x_j}^2 - {x_{j+1}}^2 - \cdots - {x_n}^2)}\, \psi\, dx_1 \cdots dx_n \\
&\quad = \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq 2K} \prod_{k=1}^{j} \left\{ \varepsilon(i_k)\, \Gamma\!\left(\frac{i_k + 1}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\, \frac{\pi(i_k+1)}{2}}\, z^{-\frac{i_k+1}{2}} + O\big(|z|^{-\frac{i_k+1}{2}}\big) \right\} \\
&\qquad \times \prod_{\ell = j+1}^{n} \left\{ \varepsilon(i_\ell)\, \Gamma\!\left(\frac{i_\ell + 1}{2}\right) z^{-\frac{i_\ell+1}{2}} + O\big(|z|^{-\frac{i_\ell+1}{2}}\big) \right\} + O\big(|z|^{-K-1}\big).
\end{aligned} \qquad (6.221)$$

最後の式変形では補題 6.30, 6.31 を使った．ここで，(6.221) の第1項を取り出すと，

$$(6.221) \text{ の第1項} = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\sqrt{-1}\, \frac{j\pi}{2}} \left(h(0) + \sum_{k=1}^{K} a_k\, z^{-k} + r_K(z)\, z^{-K} \right) \qquad (6.222)$$

となり，補題 6.29 を得た．□

証明　（補題 6.31 の証明）$n = 1$ のときに示す．$n \geq 2$ のときも同様にできる．

（第１段）始めに，

$$\int_{\mathbb{R}} e^{z\,x^2}\,\psi(x)\,dx = \int_0^\infty e^{z\,x^2}\,(\psi(x)+\psi(-x))\,dx \tag{6.223}$$

について．$\varphi(x) := \psi(x)+\psi(-x)$ とすると，仮定より，φ の原点 0 での $2K-1$ 次以下の微係数はすべて零で，$\varphi(x)=0$ $(|x|\geq\varepsilon)$ となるような $\varepsilon>0$ が存在する．このとき，$k=0,1,\ldots,,K$ に対して，

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}\right)^{k-1}\varphi = 0 \\ \text{(ii)} \quad \displaystyle\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}\right)^{k}\varphi \quad \text{は有界である} \end{cases} \tag{6.224}$$

が成り立つ．ここで作用素 $\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}$ は $\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}\right)\varphi := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\,\varphi(x)\right)$ の意味である．

（第２段）(6.224) は次のようにしていえる．実際，次の式を使う．

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}\right)^{\ell}\varphi = \sum_{m=0}^{\ell} a_m\,x^{-2\ell+m}\,\varphi^{(m)}$$

ここで各 $m=0,\ldots,m$ に対して a_m は定数で，$\varphi^{(m)}$ は m 回微分を表す．これから，一番具合の悪いところにロピタルの定理を使って，(i) のときは，$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,x^{-2(K-1)}\,\varphi(x)=0$ であること，(ii) のときは，$\lim_{x\to 0}x^{-2K}\varphi(x)$ は有界となることがわかるので，(6.224) がいえる．

（第３段）そこで，$e^{z\,x^2} = \frac{(e^{z\,x^2})'}{2zx}$ であるので，部分積分を使う．

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{z\,x^2}\varphi(x)\,dx &= \int_0^\infty (e^{z\,x^2})'\,\frac{\varphi(x)}{2zx}\,dx \\ &= \left[e^{z\,x^2}\,\frac{\varphi(x)}{2zx}\right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty e^{z\,x^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(x)}{2zx}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2z}\int_0^\infty e^{z\,x^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{x}\right)\varphi\,dx \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{2z} \right)^K \int_0^\infty e^{z\,x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^K \varphi\, dx. \tag{6.225}$$

(6.224) と (6.225) より，求める結論を得る．

$\int_{\mathbb{R}} e^{-z\,x^2}\, \psi(x)\, dx$ の場合も同様である．□

証明 （補題 6.30 の証明） m が奇数と偶数の場合にそれぞれ示す．

（第1段）($m = 2n+1$ 奇数の場合)

$$\int_{-\infty}^\infty t^m\, e^{z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty t^{2n+1}\, e^{z\,t^2}\, \psi(t)\, dt \tag{6.226}$$

ここで $0 < \varepsilon < R$ が存在して，

$$\psi(t) := \varphi(t) - \varphi(-t) = \begin{cases} 0 & (|t| \geq R) \\ 0 & (|t| \leq \varepsilon) \end{cases}$$

となっている．補題 6.31 の証明と同様にして，$\mathrm{supp}(\psi)$ はコンパクトなので，非負整数 $K \geq 0$ に対して，

$$\int_0^\infty t^{2n+1}\, e^{z\,t^2}\, \psi(t)\, dt = \left(-\frac{1}{2z} \right)^K \int_0^\infty e^{z\,t^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t} \right)^K \left(t^{2n+1}\, \psi(t) \right) dt \tag{6.227}$$

とできる．ここで，(6.227) の右辺の積分は

$$\left| \int_0^\infty e^{z\,t^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t} \right)^K \left(t^{2n+1}\, \psi(t) \right) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{\xi_0\,t^2} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t} \right)^K \left(t^{2n+1}\, \psi(t) \right) \right| dt < \infty. \tag{6.228}$$

ゆえに，(6.227) と (6.228) より，$\int_{-\infty}^\infty t^m\, e^{z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = O(|z|^{-K})$ となる．

$\int_{-\infty}^\infty t^m\, e^{-z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt$ についても全く同様である．

（第2段）($m = 2n$ 偶数の場合)

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty t^m\, e^{z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty t^{2n}\, e^{z\,t^2}\, \psi(t)\, dt =: I_n \tag{6.229}$$

とおく．ここで $0 < \varepsilon < R$ が存在して，

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2} = \begin{cases} 0 & (|t| \geq R) \\ 1 & (|t| \leq \varepsilon) \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^\infty t^{2n} \, e^{z\,t^2} \, \psi(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2z} \int_0^\infty \left(e^{z\,t^2}\right)' \, t^{2n-1} \, \psi(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2z} \Biggl\{ \left[e^{z\,t^2} \, t^{2n-1} \, \psi(t) \, dt \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &\qquad - \int_0^\infty e^{z\,t^2} \left\{ (2n-1) \, t^{2n-2} \, \psi(t) + t^{2n-1} \, \psi'(t) \right\} dt \Biggr\} \\ &= -\frac{2n-1}{2z} \, I_{n-1} - \frac{1}{2z} \int_0^\infty e^{z\,t^2} \, t^{2n-1} \, \psi'(t) \, dt, \end{aligned} \tag{6.230}$$

ここで $0 < \varepsilon < R$ が存在して，

$$\psi'(t) = \begin{cases} 0 & (|t| \geq R) \\ 0 & (|t| \leq \varepsilon) \end{cases}$$

である．ここで，(6.230) の第 2 項に，先程の $m = 2n-1$（奇数）の場合の結果を適用し，任意の非負整数 $K \geq 0$ に対して，

$$I_n = -\frac{2n-1}{2z} \, I_{n-1} + O\bigl(|z|^{-K}\bigr) \tag{6.231}$$

を得る．

よって帰納法を使うことができ，

$$I_n = \left(-\frac{1}{2z}\right)^n (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot I_0 + O(|z|^{-K}) \tag{6.232}$$

ここで $I_0 := \int_0^\infty e^{z\,t^2} \, \psi(t) \, dt$ である．

（第3段）今度は $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, e^{-z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt$ の場合について考える．

$$\int_0^\infty e^{-z\,t^2}\,\psi(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-z\,t^2}\,dt + \int_0^\infty e^{-z\,t^2}\,(\psi(t)-1)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty e^{-z\,t^2}\,(\psi(t)-1)\,dt \qquad (6.233)$$

であるので，(6.233) の右辺の第2項を考える．まず，$z = \xi_0 + \sqrt{-1}\,y$（$\xi_0 > 0$ は固定）としたとき，

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-z\,t^2}\,\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)^{K-1}(\psi(t)-1) = 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} e^{-z\,t^2}\,\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)^{K-1}(\psi(t)-1) = 0 \\ \displaystyle\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)^{K}(\psi(t)-1)\right| \text{ は有界である} \end{cases} \qquad (6.234)$$

となる．(6.234) の最初の式では $\psi(t) = 0$（$|t| \geq R$ 上で）を，2番目の式では $\psi = 1$（$|t| \leq \varepsilon$ 上で）を使い，3番目では $\psi(t) = 1$（$|t| \leq \varepsilon$ 上で），かつ $\psi(t) = 0$（$|t| \geq R$ 上で）を使って示される．

（第4段）したがって，(6.233) の第2項については，(6.234) より，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z\,t^2}\,(\psi(t)-1)\,dt &= -\frac{1}{2z}\int_0^\infty \frac{(e^{-z\,t^2})'}{t}\,(\psi(t)-1)\,dt \\ &= -\frac{1}{2z}\left[e^{-z\,t^2}\,\frac{1}{t}\,(\psi(t)-1)\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &\qquad + \frac{1}{2z}\int_0^\infty e^{-z\,t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)(\psi(t)-1)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-z\,t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)(\psi(t)-1)\,dt \\ &= \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2z}\right)^{K}\int_0^\infty e^{-z\,t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{t}\right)(\psi(t)-1)\,dt \end{aligned}$$

$$= O(|z|^{-K}). \tag{6.235}$$

（第5段）先程と同様に漸化式を用いて次が示される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, e^{-z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = 2\left(\frac{1}{2z}\right)^n (2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + O(|z|^{-K})$$
$$= \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) z^{-\frac{2n+1}{2}} + O(|z|^{-K}) \tag{6.236}$$

となる．これから (6.217) を得る．

（第6段）(6.218) を $m = 2n$（偶数）のときに得るには，I_0 の計算が残っている．$z = \xi_0 + \sqrt{-1}\, y$ のとき，

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(y)}\, |y|^{-\frac{1}{2}} + O(|y|^{-\frac{3}{2}}) \tag{6.237}$$

が成り立つことを示そう（$\mathrm{sgn}(y)$ は y の符号）．そうすれば，(6.237) を (6.232) に代入して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, e^{z\,t^2}\, \varphi(t)\, dt = 2\left(\frac{-1}{2z}\right)^n (2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(y)}\, |y|^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ O(|z|^{-n}\, |y|^{-\frac{3}{2}})$$
$$= \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi(2n+1)}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(y)}\, z^{-n}\, \frac{|y|^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1}} + O(|z|^{-n}\, |y|^{-\frac{3}{2}})$$
$$= \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi(2n+1)}{2}}\, z^{-n}\, (\sqrt{-1}\, y)^{-\frac{1}{2}} + O(|z|^{-n-\frac{3}{2}}). \tag{6.238}$$

ここで $y = \mathrm{Im}(z) \to \infty$ ($\xi_0 = \mathrm{Re}(z) > 0$ 固定) としている．(6.238) の最後の式において，

$$z^{-n}\, (\sqrt{-1}\, y)^{-\frac{1}{2}} = z^{-n-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\xi_0}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} = z^{-n-\frac{1}{2}} + O(|z|^{-n-\frac{3}{2}})$$

であるので，(6.218) を得る．

（第7段）(6.237) の証明.

$f(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\,y\,t^2}\, b(t)\,dt$, $b(t) := e^{\xi_0\,t^2}\,\varphi(t)$ とおくとき,

$$f(y) = \pi^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(y)}\, |y|^{-\frac{1}{2}} + O(|y|^{-\frac{3}{2}})$$

を示せばよい.

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, e^{-\sqrt{-1}\,t\xi}\, d\xi, \quad \widehat{b}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, e^{\sqrt{-1}\,x\xi}\, dx$$

であるので,

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\,yt^2} b(t)\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{-1}\,yt^2}\,dt\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, e^{-\sqrt{-1}\,t\xi}\, d\xi \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, e^{-\frac{\sqrt{-1}\,\xi^2}{4y}}\, d\xi \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{-1}\,y(t-\frac{\xi}{2y})^2}\,dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, e^{-\frac{\sqrt{-1}\,\xi^2}{4y}}\, \rho_R(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{6.239}$$

ここで関数 ρ_R の定義は

$$\rho_R(\xi) := \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{-1}\,y(t-\frac{\xi}{2y})^2}\,dt = \int_{-R+\frac{\xi}{2y}}^{R+\frac{\xi}{2y}} e^{\sqrt{-1}\,ys^2}\,ds \tag{6.240}$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\,ys^2}\,ds.$$

ここで次式が成り立つ（小松勇作『特殊函数（近代数学講座5)』, 朝倉書店, p.45 などを見よ).：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\,ys^2}\,ds = 2\int_{0}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\,ys^2}\,ds &= \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}} \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,t\,\mathrm{sgn}(y)}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{|y|^{\frac{1}{2}}}\, e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(y)}. \end{aligned} \tag{6.241}$$

（第8段）$e^{\zeta} = 1 + R(\zeta) := 1 + \left(\int_0^1 e^{\zeta\, t}\, dt\right)\zeta$ とおく．(6.241) を (6.239) に代入して，

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{|y|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\operatorname{sgn}(y)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, e^{-\frac{\sqrt{-1}\,\xi^2}{4y}}\, d\xi \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{|y|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\operatorname{sgn}(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, d\xi \\
&\qquad + \frac{\sqrt{\pi}}{|y|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\operatorname{sgn}(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, R\left(-\frac{\sqrt{-1}\,\xi^2}{4y}\right) d\xi,
\end{aligned} \tag{6.242}$$

ここで (6.242) の第1項は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, d\xi = b(0)$ なのであるから，$b(0) = 1$ を使い，

$$(6.242)\ \text{第 1 項} = \frac{\sqrt{\pi}}{|y|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\operatorname{sgn}(y)}\, b(0) = \pi^{\frac{1}{2}}\, e^{\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(y)}\, |y|^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.243}$$

一方，(6.242) の第2項は

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{b}(\xi)\, R\left(-\frac{\sqrt{-1}\,\xi^2}{4y}\right) d\xi\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{b}(\xi)|\, \frac{\xi^2}{4|y|}\, d\xi = O\left(\frac{1}{|y|}\right) \tag{6.244}$$

となるから

$$(6.242)\ \text{の第 2 項} = O(|y|^{-\frac{3}{2}}) \tag{6.245}$$

となる．(6.242), (6.243), (6.245) より求める (6.237) を得る．

以上により，補題 6.30 を得た．□

6.8 3つの補題

コラン＝ド＝ヴェルディィエの主定理 6.21 を得るために，いよいよ定理 6.28（鞍部点定理）を適用する．

このためには 6.6 節における $I_\ell^+(\sigma,t) = \widehat{D_\ell^+}(\sigma,t)$ を評価しておかねばならない．$I_\ell^-(\sigma,t) = \widehat{D_\ell^-}(\sigma,t)$ の評価はすでに命題 6.27 で行っている．

まず $I_\ell^+(\sigma,t)$ の定義を思い起こそう.

$$I_\ell^+(\sigma,t) := \widehat{D_\ell^+}(\sigma,t)$$
$$= \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}\times\mathbb{R}} e^{-\frac{z}{4}E_U((x_i))}\,{P_\ell}^{k+}((x_i),U,z)$$
$$\times\, e^{\sqrt{-1}\,ty-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2}\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}}\,dy \qquad (6.246)$$

であった.

補題6.32　任意の $t>0$ に対して, 次の性質 (1) ~ (6) を満たす2つの正数 ρ_0, ρ_1 $(0<\rho_0<\rho_1<\mathrm{inj})$ と自然数 k, 正数 $\beta>0$, 図6.10 のような $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 関数 φ と自然数 ℓ_0 が存在する：

(1)　$\sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}|I_\ell^+(\sigma,t)| = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$,

(2)　任意の $\ell\in\{0,1,\ldots,\ell_0\}$ に対し, $[\ell\,\rho_0,\ell\,\rho_1]\cap[2\sqrt{t-\beta},\,2\sqrt{t+\beta}]=\emptyset$.

(3)　$2\sqrt{t}\notin\mathcal{L}$ ならば, $[2\sqrt{t-\beta},2\sqrt{t+\beta}]\cap\mathcal{L}=\emptyset$.

(4)　$2\sqrt{t}$ が $\mathcal{L}$ の孤立点ならば, $[2\sqrt{t-\beta},2\sqrt{t+\beta}\cap\mathcal{L}=\{2\sqrt{t}\}$.

(5)　任意の $\ell\in\{0,1,\ldots,\ell_0\}$ に対して, $((x_i),U,z)\in\mathrm{supp}({P_\ell}^{k\,*})$ ならば, $\overline{x_ix_{i+1}}\geq\rho_0$ $(\forall\ i=0,1,\ldots,\ell-1)$.

(6)　次の評価が成立する.

$$\hat{\hat{Z}}(\sigma,t)=\sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell\int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}\times\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i))+\sqrt{-1}y\left(t-\frac{E_U((x_i))}{4}\right)-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right\}$$
$$\times\ \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)\,{P_\ell}^{k\,*}((x_i),U,z)\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}}\,dy+O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).\quad(6.247)$$

補題6.33　補題 6.32 の状況を踏襲し, f を, $f(u_0,\ldots,u_\ell):=\sum_{i=0}^{\ell}\frac{{\alpha_i}^2}{u_i}$ で与えられる $X_{\ell+1}$ 上の実数値関数, ℓ 個の実数を $\alpha_i\in[\rho_0,\rho_1]$ $(i=0,\ldots,\ell-1)$, $\alpha_\ell\in[0,\rho_1]$ とし, $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\Phi)\cap[\sqrt{\frac{9}{10}}\,\ell\,\rho_0,\sqrt{\frac{11}{10}}\,\ell\,\rho_1]=\emptyset$ を満たすもの, $\ell+1$ 個の実数を $k_i\in\mathbb{R}$ $(i=0,1,\ldots,\ell)$, $k_\ell\leq\frac{n}{2}$ (ただし $n=\dim M$) とする. このとき, 任意の自然数 $K\in\mathbb{N}$ に対して, z, α_i $(i=0,1,\ldots,\ell)$ に依存しない2つの正定数 C_K, $D_K>0$ が存在して, $\alpha_\ell\leq D_K$ ならば,

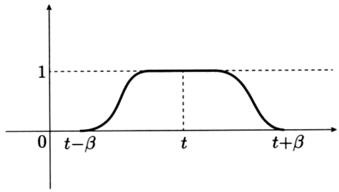


図 6.10　関数 φ の図

$$\left| \int_{X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4} f(U)} \Phi\left(\sqrt{f(U)}\right) {u_0}^{k_0} \cdots {u_{\ell-1}}^{k_{\ell-1}} {u_\ell}^{-k_\ell} \mu_{\ell+1} \right|$$
$$\leq \begin{cases} \dfrac{C_K}{|z|^K {\alpha_\ell}^{n-2}} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \\ \dfrac{C_K}{|z|^K} |\log \alpha_\ell| & (n = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

補題 6.34　ℓ_0 を補題 6.32 における自然数とする．$\ell = 0, 1, \ldots, \ell_0$ に対して，次の (1), (2) を満たす $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 実数値関数 ψ_ℓ で，原点 0 の近傍で 1 となるものが存在する：

(1) z の関数 $A_\ell(z) := \int_{M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4} E_U((x_i))} {P_\ell}^{k*}((x_i), U, z)$
$$\times \varphi\left(\tfrac{E_U((x_i))}{4}\right) \psi_\ell(\,\overline{x_\ell x_0}\,)\, \widetilde{\lambda_{\ell+1}}$$
は $z \to \infty$ のとき，有界である（補題 6.20 (1) での定義を見よ）．

(2) $\widetilde{E}((x_i), U) := E_U((x_i))$ の臨界点 $((x_i), U)$ で，A_ℓ の被積分関数の台に属するものは存在しない．

証明　（補題 6.32 の証明）

（第 1 段）$\rho_0 > 0$ は，$0 < \rho_0 < \mathrm{inj}$ で，$2\sqrt{t} \notin \{\ell \rho_0 | \ell \in \mathbb{N}\}$ (ρ_1 は $0 < \rho_0 < \rho_1 < \mathrm{inj}$ に取る) かつ $\ell_0 \rho_0 < 2\sqrt{t} < (\ell_0 + 1)\rho_0$ と取る．このとき，任意の $\ell \geq \ell_0 + 1$ ($\ell \in \mathbb{N}$) と $(x_i) \in M_0^{\ell+1}$ に対し，

$$N((x_i)) := N((x_0, \ldots, x_\ell)) := \#\{i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\} | \overline{x_i x_{i+1}} \geq \rho_0\}$$

とおくと，次式が成立する：

$$E_U((x_i)) = \frac{\overline{x_0x_1}^2}{u_0} + \cdots + \frac{\overline{x_{\ell-1}x_\ell}^2}{u_{\ell-1}} \geq {\rho_0}^2\, N((x_i))^2 \tag{6.248}$$

実際，$\overline{x_ix_{i-1}} \geq \rho_0$ $(i = 0, 1, \ldots, N((x_i)) - 1)$ としてみると，

$$\begin{aligned}
E_U((x_i)) &\geq {\rho_o}^2 \left(\frac{1}{u_0} + \cdots + \frac{1}{u_{N((x_i))-1}}\right) \\
&= {\rho_0}^2\,(u_0 + \cdots + u_\ell)\left(\frac{1}{u_0} + \cdots + \frac{1}{u_{N((x_i))-1}}\right) \\
&\geq {\rho_0}^2\,(u_0 + \cdots + u_{N((x_i))-1})\left(\frac{1}{u_0} + \cdots + \frac{1}{u_{N((x_i))-1}}\right) \\
&\geq {\rho_0}^2\, N((x_i))^2 \quad \text{(コーシー・シュワルツの不等式より).}
\end{aligned}$$

（第2段）さて (6.176) と ${P_\ell}^{k+}$ の定義（(6.182) 式の前にある）より，

$$\begin{aligned}
{P_\ell}^{k+}((x_i), U, z) = \sum_{j_0,\ldots,j_\ell} & V_{j_0}(x_0, x_1)\cdots V_{j_{\ell-1}}(x_{\ell-1}x_\ell) \\
& \times U_{j_\ell}(x_\ell, x_0)\, Q_{j_0\cdots j_\ell}(U)\, z^{\ell\,(\frac{n}{2}-1) - \sum_{i=0}^{\ell} j_i + \frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{6.249}$$

という形に書くことができるが，${P_\ell}^{k+}$ は z の非負冪のみなので，

$$\sum_{i=0}^{\ell} j_i \leq \ell\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{2} \tag{6.250}$$

である．命題 6.11 より，$\mathrm{supp}(V_k) \subset \{(p,q) \in M \times M \,|\, \overline{pq} \leq \rho_1\}$ かつ $\mathrm{supp}(V_i) \subset \{(p,q) \in M \times M \,|\, \rho_0 \leq \overline{pq} \leq \rho_1\}$ $(i = -1, \ldots, k-1)$ であるので，$\overline{x_ix_{i+1}} < \rho_0$ となるような i に対して，${P_\ell}^{k+}$ に現れる $V_{j_i}(x_i, x_{i+1})$ の j_i は k とならねばならない．したがって $j_\ell \geq 0$, $j_0, \ldots, j_{\ell-1} \geq -1$ と合わせて，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\ell} j_i &\geq \bigl(\ell - N((x_i))\bigr)\, k - N((x_i)) \\
&= \ell\, k - (k+1)\, N((x_i))
\end{aligned} \tag{6.251}$$

を得る．したがって，(6.250) と (6.251) と合わせて，

$$N((x_i)) \geq \frac{1}{k+1}\left\{\ell k - \ell\left(\frac{n}{2}-1\right) - \frac{n}{2}\right\} = \frac{\ell(2k-n+2)-n}{2(k+1)}. \quad (6.252)$$

（第3段）したがって，$k > \frac{n}{2}$ ならば (6.252) は ℓ について単調増加であり，かつ，ℓ を固定し，$k \to \infty$ とすると，単調に ℓ に収束する．ℓ_0 を

$$\rho_0(\ell_0+1) > 2\sqrt{t} > \rho_0\,\ell_0, \quad \iff \quad \ell_0+1 > \frac{2\sqrt{t}}{\rho_0} > \ell_0$$

となるように取っておくと，自然数 k と正数 $1 \geq \varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の $\ell \geq \ell_0+1$ に対して，

$$\begin{aligned} N((x_i)) &\geq \frac{\ell(2k-n+2)-n}{2(k+1)} \\ &\geq \frac{(\ell_0+1)(2k-n+2)-n}{2(k+1)} \\ &\geq \frac{2\sqrt{t+\varepsilon_0}}{\rho_0} \end{aligned} \quad (6.253)$$

とできる．したがって (6.253) と (6.248) と合わせ，任意の $\ell \geq \ell_0$ に対して，

$$E_U((x_i)) \geq 4\,(t+\varepsilon_0) \quad (6.254)$$

が成り立つ．ゆえに，任意の $\ell \geq \ell_0$ に対して，

$$\mathrm{supp}({P_\ell}^{k\,+}) \subset \{((x_i),U) \,|\, E_U((x_i)) \geq 4\,(t+\varepsilon_0)\} \times \mathbb{C}^+ \quad (6.255)$$

となる．さらに，k を $k \geq 2n+1$ ($n = \dim M$) となるよう十分大に取ると，$\ell = 0,1,\ldots,\ell_0$ に対しては (6.252) より，

$$N((x_i)) > \ell - 1 \quad (6.256)$$

が成り立つようにでき，同時に (6.255) も成り立つようにできる．(6.256) は $\overline{x_i x_{i+1}} \geq \rho_0$ ($i = 0,1,\ldots,\ell-1$) を意味している．つまり，(5) が成立している．このようにして，ρ_0, k, ℓ_0 が決められた．ρ_1 と β は (2), (3), (4) を満たすように取り，φ は 図6.10 のような $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数に取っておく．

（第4段）このとき，(1) が成り立つことを示そう．これを用いて，(6) も示す．

(1) について：$\ell \geq \ell_0$ とする．$p \geq 1$ である整数に対して，

$$Y_p := \{((x_i), U) \in M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1} | \, E_U((x_i)) \in [4(t+p), 4(t+p+1)]\},$$

$$Y_0 := \{((x_i), U) \in M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1} | \, E_U((x_i)) \in [4(t+\varepsilon_0), 4(t+1)]\}$$

とおく．(6.255) より，$\mathrm{supp}(P_\ell{}^{k+}) \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} Y_p \times \mathbb{C}^+$ である．

$$I_\ell^p(\sigma, t) :=$$
$$\int_{Y_p \times \mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi_0}{4} E_U((x_i)) + \sqrt{-1}\, y\left(t - \frac{E_U((x_i))}{4}\right) - \sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right)$$
$$\times P_\ell{}^{k+} \, \widetilde{\lambda_{\ell+1}} \, dy \quad (6.257)$$

とおく．このとき，$Y_p \times \mathbb{R}$ 上で，

$$\begin{aligned} -p-1 \leq & t - \frac{E_U((x_i))}{4} \leq -p \qquad (p = 1, 2, \ldots \text{ のとき}) \\ -1 \leq & t - \frac{E_U((x_i))}{4} \leq -\varepsilon_0 \qquad (p = 0 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (6.258)$$

を満たし，$P_\ell{}^{k+}$ の z の最高次の次数は $\frac{\ell+1}{2} n$ $(n = \dim M)$ なので，補題 6.20 (2) (a) と命題 6.25 より，$p = 1, 2, \ldots$ のとき，

$$\begin{aligned} |I_\ell^p(\sigma, t)| \leq & \, C_{\xi_0} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(\ell+1)n}{2}\right) \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma}} \\ & \times \int_{Y_p} e^{-\frac{\xi_0}{4} E_U((x_i))} |P_\ell{}^{k+}| \left(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\right) \widetilde{\lambda_{\ell+1}} \\ \leq & \, C_1' C_2{}^\ell \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma}} \left(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\right)^{\frac{\ell+1}{2} n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(\ell+1)n}{2}\right)}{\{\ell(2n+1-[\frac{n}{2}]\}!} \\ \leq & \, C_1' C_2{}^\ell \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma}} \left(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\right)^{\frac{\ell+1}{2} n} \cdot \frac{C''}{\{(\ell+1)n\}!} \end{aligned} \quad (6.259)$$

最後の式でスターリングの公式を使った．$C'' > 0$ は ℓ には依らない正定数である．

（第5段）$p = 0$ のときも同様に，

$$
\begin{aligned}
|I_\ell^p(\sigma,t)| &\le C_{\xi_0}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\ell+1)n}{2}\right)\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon_0{}^2}{4\sigma}} \\
&\qquad\times\int_{Y_0} e^{-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i))}\,|P_\ell{}^{k+}|\left(2\xi_0+\frac{5}{\sigma}\right)\widetilde{\lambda_{\ell+1}} \\
&\le C_1'\,C_2{}^\ell\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\xi_0{}^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0+\frac{5}{\sigma}\right)^{\frac{\ell+1}{2}n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\ell+1)n}{2}\right)}{\{\ell(2n+1-\left[\frac{n}{2}\right]\}!} \\
&\le C_1'\,C_2{}^\ell\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon_0{}^2}{4\sigma}}\left(2\xi_0+\frac{5}{\sigma}\right)^{\frac{\ell+1}{2}n}\cdot\frac{C''}{\{(\ell+1)\,n\}!}
\end{aligned}
\tag{6.260}
$$

(6.259) と (6.260) より，

$$
\sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}|I_\ell^p(\sigma,t)| \le
\begin{cases}
C_3\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{p^2}{4\sigma}}\,e^{C_4+\sqrt{2\xi_0+\frac{p+5}{\sigma}}} & (p=1,2,\ldots\ \text{のとき}) \\
C_3\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon_0{}^2}{4\sigma}}\,e^{C_4+\sqrt{2\xi_0+\frac{5}{\sigma}}} & (p=0\ \text{のとき})
\end{cases}
\tag{6.261}
$$

を得る．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}|I_\ell^+(\sigma,t)| &= \sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|I_\ell^p(\sigma,t)| \\
&\le C_3\sigma^{-\frac{1}{2}}e^{C_4+\sqrt{2\xi_0+\frac{p+5}{\sigma}}}\left\{e^{-\frac{\varepsilon_0{}^2}{4\sigma}}+\sum_{p=1}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{4\sigma}}\right\}
\end{aligned}
\tag{6.262}
$$

を得る．ここで (6.262) の右辺の $\{\quad\}$ の級数については

$$
\sum_{p=1}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{4\sigma}} \le \sum_{p=1}^{\infty}e^{-\frac{p}{4\sigma}} = e^{-\frac{1}{4\sigma}}\left(1-e^{-\frac{1}{4\sigma}}\right)^{-1} \to 0 \qquad (\sigma\to 0\ \text{のとき})
$$

したがって，$e^{C_4+\sqrt{2\xi_0+\frac{p+5}{\sigma}}}\left\{e^{-\frac{\varepsilon_0{}^2}{4\sigma}}+\sum_{p=1}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{4\sigma}}\right\}$ は，$\sigma\to 0$ のとき有界となる．ゆえに (1), すなわち，$\sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}|I_\ell^+| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$ が示された．

（第6段）(6) を示す．$\ell = 0, 1, \ldots, \ell_0$ に対して，

$$\int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}\times\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi_0}{4}\,E_U((x_i))+\sqrt{-1}\,y\left(t-\frac{E_U((x_i))}{4}\right)-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right)$$
$$\times\left\{1-\varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)\right\} P_\ell{}^{k+}\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}}\,dy$$
$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.263}$$

を示せば，(1) と命題 6.27 と合わせて (6) を得る．さて，関数 φ は t の近傍において 1 となるので，$\frac{E_U((x_i))}{4}$ が t に近いとき，$1-\varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)=0$ となる．したがって，(6.263) の積分の被積分関数の台の上では，正定数 $t_0 > 0$ が存在して，$\left|t-\frac{E_U((x_i))}{4}\right| \geq t_0$ が成り立つ．ゆえに，補題 6.20 (2) (b) が適用でき，(6.263) が成り立ち，しかも t について一様に成立する．□

証明　（補題 6.33 の証明）

（第1段）以下において様々な正定数 C_j は ℓ, ρ_0, ρ_1, (k_i), Φ にのみ依存する定数を表すものとする．任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\Omega_i^\varepsilon := \left\{U \in X_{\ell+1} \middle| \left|\frac{\alpha_i}{u_i}-\frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad (i = 0, 1, \ldots, \ell-2 \text{ のとき}),$$

$$\Omega_{\ell-1}^\varepsilon := \left\{U \in X_{\ell+1} \middle| \left|\frac{\alpha_i}{u_i}-\frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| < \varepsilon\ (\forall\, i = 0, 1, \ldots, \ell-2)\right\}$$

とおく．このとき，次の性質を満たす正定数 $C_i > 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ が存在することを示そう．任意の $0 < \varepsilon \leq C_1$, $0 \leq \alpha_\ell \leq C_2$ と $U \in A := \Omega_{\ell-1}^\varepsilon \cap \operatorname{supp}\left(\Phi\circ\sqrt{f}\right)$ に対して，次が成立する：

$$0 < u_\ell \leqq C_6 \quad \text{であるが，} \quad \left|\frac{\alpha_0}{u_0}-\frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| \geq C_3 \tag{6.264}$$

または

$$u_\ell \geq C_4 \quad \text{かつ} \quad \left|\frac{\alpha_0}{u_0}-\frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| \geq C_5 \tag{6.265}$$

が成り立つ．

（第 2 段）まず，$f(U)=\sum_{i=0}^{\ell}\frac{{\alpha_i}^2}{u_i}$ の形を使うと，ある正定数 $C>0$ が存在して，

$$U\in A:=\Omega_{\ell-1}^{\varepsilon}\cap\mathrm{supp}(\Phi\circ\sqrt{f})\quad \text{ならば，}\ f(U)>(\ell\,\rho_1)^2+C \tag{6.266}$$

が成り立つことに注意する．実際，仮定より $\mathrm{supp}(\Phi)\cap[\ell\,\rho_0,\,\ell\,\rho_1]=\emptyset$ となるので，正定数 $C>0$ が存在して，A 上で，

$$\sqrt{f}\geq\ell\,\rho_1+C\quad \text{か，または}\quad \sqrt{f}\leq\ell\,\rho_0-C \tag{6.267}$$

が成り立つ．ところが

$$\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{u_i}=\left(\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{u_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\ell}u_i\right)\geq\left(\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{u_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\ell-1}u_i\right)\geq\ell^2$$

なので，α_i の仮定より，

$$f(U)=\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{{\alpha_i}^2}{u_i}+\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}\geq{\rho_0}^2\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{u_i}\geq(\ell\,\rho_0)^2.$$

よって，(6.267) の前者のみが起こる．つまり，(6.266) が言えた．

（第 3 段）さて，$\frac{\alpha_i}{u_i}=\frac{\alpha_0}{u_0}+\omega_i$ $(i=0,1,\ldots,\ell)$ とおく．$U\in X_{\ell+1}$ に対して，$U\in\Omega_{\ell-1}^{\varepsilon}$ なら

$$|\omega_i|<\ell\varepsilon(i=0,1,\ldots,\ell-1),f(U)=\sum_{i=0}^{\ell-1}\left\{\omega_i-\omega_\ell+\frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right\}\alpha_i+\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}$$

である．ここで 次の 2 通りがある：

場合 1. ある正数 $C_4>0$ が存在して $1\geq u_\ell\geq C_4$ となるとき．

場合 2. 場合 1 でないとき．

（第 4 段）場合 1 のとき，(6.265) となることを示す．実際，$U\in A$ ならば，

$$\begin{aligned}|f(U)|&=\left|\sum_{i=0}^{\ell-1}\left\{\omega_i-\omega_\ell+\frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right\}\alpha_i+\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}\right|\\&\leq\sum_{i=0}^{\ell-1}|\omega_i|\,\alpha_i+\frac{u_\ell\,\ell\,|\omega_\ell|\,\rho_1+\ell\,\rho_1\,\alpha_\ell+{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}.\end{aligned} \tag{6.268}$$

ここで 場合 1 の仮定より,

$$(6.268) \text{ の右辺} \leq \varepsilon\,\ell\,\rho_1 + \frac{\ell\,|\omega_\ell|\,\rho_1 + \ell\rho_1\,\alpha_\ell + {\alpha_\ell}^2}{C_4} \tag{6.269}$$

が成り立つ．これと同時に，(6.266) の式 $|f(U)| > (\ell\,\rho_1)^2 + C$ が任意の $\alpha_\ell \leq C_2$ について成り立つようにするには，正定数 $C_5 > 0$ が存在して，$\omega_\ell \geq C_5$ が成り立っていなければならない．すなわち，

$$\left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| \geq C_5$$

つまり (6.265) となる．

（第5段）場合 2 のとき，次の補助補題が成立する（勝田 篤氏による）:

<u>**補助補題**</u>　正数 $C_6 > 0$ は $\frac{1}{400} < C_6 < \frac{1}{200}$ を満たす十分小さな正定数とし，$\varepsilon > 0$, ρ_0, ρ_1, u_ℓ が次の不等式を満たすとする：　$\varepsilon' := (\ell - 1)\varepsilon$ として，

$$\varepsilon' < C_6 \min\{\rho_0, 1\}, \quad 1 \leq \frac{\rho_1}{\rho_0} \leq 1 + \varepsilon', \quad u_\ell \leq C_6.$$

このとき

$$\left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| < C_6 \quad \text{ならば,} \quad \sqrt{f(U)} \in \left[\sqrt{\frac{9}{10}}\,\ell\,\rho_0,\ \sqrt{\frac{11}{10}}\,\ell\,\rho_1\right] \quad \text{が成り立つ.}$$

この補助補題の証明は第10段で行う．

さてこのとき，Φ が

$$\mathrm{supp}(\Phi) \cap \left[\sqrt{\frac{9}{10}}\,\ell\,\rho_0,\ \sqrt{\frac{11}{10}}\,\ell\,\rho_1\right] = \emptyset$$

を満たす，と仮定する．つまり，補助補題の結論を否定するのであるから，$|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}| < C_6$ は起こらない．すなわち，$|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}| \geq C_6$ でなければならない．よって，場合 2 のときは (6.264) が成立する．

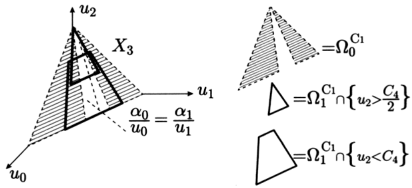


図 6.11　X_3 の開被覆

（第 6 段）さて，ここで $\varepsilon = C_1$ に対応する Ω_i^ε $(i = 0, \ldots, \ell - 1)$ から得られる $X_{\ell+1}$ の開被覆を $\{\Omega_0^{C_1}, \ldots, \Omega_{\ell-2}^{C_1}, \Omega_{\ell-1}^{C_1} \cap \{u_\ell > \frac{C_4}{2}\}, \Omega_{\ell-1}^{C_1} \cap \{u_\ell < C_4\}\}$ とし，対応する 1 の分解を $\varphi_0, \ldots, \varphi_{\ell-2}, \varphi_{\ell-1}, \varphi_\ell$ とする．さらにこれらの関数が α_i $(i = 0, \ldots, \ell - 1)$ について連続的に依存するように取っておく．

（第 7 段）関数 g を補題 6.33 の評価したい積分の被積分関数とし，$i = 0, 1, \ldots, \ell$ に対して，

$$K_i := \int_{X_{\ell+1}} g\, \varphi_i\, \mu_{\ell+1} \tag{6.270}$$

とおく．そこで

(1) $i = 0, 1, \ldots, \ell - 2$ に対する K_i の評価,

(2) $i = \ell - 1, \ell$ に対する K_i の評価

に分けて K_i を評価する．

（第 8 段）(1) の場合．ℓ 次元開単体 $X_{\ell+1}$ の座標として，$u_0, \ldots, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_\ell$ を取る．$\sum_{i=0}^{\ell} u_i = 1$ かつ $f(U) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i}$ であったので，

$$f_{u_i} := \frac{\partial f}{\partial u_i} = -\left(\frac{{\alpha_i}^2}{{u_i}^2} - \frac{{\alpha_{i+1}}^2}{{u_{i+1}}^2}\right)$$

となる．よって，$\Omega_i^{C_1} = \left\{U \in X_{\ell+1} \,\middle|\, \left|\frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| > \frac{C_1}{2}\right\}$ 上において，

$$|f_{u_i}| \geq \frac{C_1}{2}\left(\frac{\alpha_i}{u_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right) \geq C_1\, \rho_0 \tag{6.271}$$

となる．ここで非負整数 $K \geq 0$ に対して，

$$e^{-\frac{z}{4} f(U)} = \left(-\frac{4}{z}\right)^K \left(\frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}\right)^K e^{-\frac{z}{4} f(U)}$$

が成り立っている．ここで作用素 $\frac{1}{f_{u_i}}\frac{\partial}{\partial u_i}$ は $h \mapsto \frac{1}{f_{u_i}}\frac{\partial h}{\partial u_i}$ を表し，$\big(\frac{1}{f_{u_i}}\frac{\partial}{\partial u_i}\big)^K$ はこの作用素を K 回作用させるという意味である．したがって，

$$K_i = \left(-\frac{4}{z}\right)^K \int_{X_{\ell+1}} \left(\frac{1}{f_{u_i}}\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^K e^{-\frac{z}{4} f(U)} \times \Phi(\sqrt{f})\, {u_0}^{k_0} \cdots {u_{\ell-1}}^{k_{\ell-1}}\, {u_\ell}^{-k_\ell}\, \varphi_i\, \mu_{\ell+1} \tag{6.272}$$

を得る．ここで (6.273) において u_i $(i=0,1,\ldots,\ell-2)$ について K 回部分積分する．その際，(6.272) であることと，$0<\rho_0\le\alpha_i\le\rho_1$ $(i=0,1,\ldots,\ell-1)$ なので任意の実数 $k_0,\ldots,k_{\ell-1}$ に対して

$$e^{-\frac{z}{4} f(U)}\, {u_0}^{k_0} \cdots {u_{\ell-1}}^{k_{\ell-1}} = e^{-\frac{z}{4}\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}} \left\{ e^{-\frac{z}{4}\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{{\alpha_i}^2}{u_i}}\, {u_0}^{k_0} \cdots {u_{\ell-1}}^{k_{\ell-1}} \right\}$$

は $X_{\ell+1}$ 上で有界であることに注意する．$0<u_\ell<1$ と $k_\ell\le\frac{n}{2}$ より，${u_\ell}^{-k_\ell}\le{u_\ell}^{-\frac{n}{2}}$ であるので，

$$|K_i| \le \frac{C_K}{|z|^K}\int_0^1 e^{-\frac{\xi_0}{4}\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}}\, {u_\ell}^{-\frac{n}{2}}\, du_\ell \tag{6.273}$$

なる評価を得る．

ここで (6.274) の積分 $\int_0^1 e^{-\frac{\xi_0}{4}\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}}\, {u_\ell}^{-\frac{n}{2}}\, du_\ell$ を評価する．$v:=\frac{\xi_0}{4}\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}$ と変数変換して，

$$\int_0^1 e^{-\frac{\xi_0}{4}\frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell}}\, {u_\ell}^{-\frac{n}{2}}\, du_\ell = \left(\frac{\xi_0}{4}{\alpha_\ell}^2\right)^{1-\frac{n}{2}} \int_{\frac{\xi_0}{4}{\alpha_\ell}^2}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{n}{2}-2}\, dv. \tag{6.274}$$

ここで $n:=\dim M\ge 3$ のとき，

$$\int_{\frac{\xi_0}{4}{\alpha_\ell}^2}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{n}{2}-2}\, dv \le \int_0^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{n}{2}-2}\, dv < \infty$$

である．$n=2$ のときは積分指数関数 Ei のベッセルの公式（たとえば，『岩波数学公式集 III』岩波書店，1973，p. 24）を使うと，$0\le\alpha_\ell\le\rho_1(=: D_K$ とおく$)$

に対して,

$$\left|\int_{\frac{\xi_0}{4}{\alpha_\ell}^2}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{n}{2}-2}\, dv\right| = \left|\mathrm{Ei}\left(\frac{\xi_0}{4}{\alpha_\ell}^2\right)\right| \leq C\left|\log\frac{\xi_0}{4}\,{\alpha_\ell}^2\right| \leq C'\,|\log\alpha_\ell|$$

となる．以上より，K_i $(i=0,1,\ldots,\ell-2)$ については求める評価を得る．

（第9段）(2) の場合，$i=\ell-1,\ell$ に対する K_i の評価．これらの場合，ℓ 次元単体 $X_{\ell+1}$ の座標として，$u_0,u_1,\ldots,u_{\ell-1}$ を取る．

$$\frac{\partial f}{\partial u_0} = -\left(\frac{{\alpha_0}^2}{{u_0}^2} - \frac{{\alpha_\ell}^2}{{u_\ell}^2}\right) = -\left(\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right)\left(\frac{\alpha_0}{u_0} + \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right)$$

なので,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| = \left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right|\left|\frac{\alpha_0}{u_0} + \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| \geq C_3\left|\frac{\alpha_0}{u_0} + \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right|.$$

ここで，$A = \Omega_{\ell-1}^{C_1} \cap \mathrm{supp}(\Phi\circ\sqrt{f})$ 上において (6.264) かまたは (6.265) が成り立つことを使う．さらに $\rho_1 \geq \alpha_0 \geq \rho_0$ かつ $\rho_1 \geq \alpha_\ell \geq 0$ より,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| \geq C_3\,\rho_0 \quad \text{(かまたは)} \quad C_5\,\rho_0 \tag{6.275}$$

を得る．(6.272) と同じ評価を得たことになるので，(1) と同様にして，u_0 について，$K_{\ell-1}, K_\ell$ を K 回部分積分し，K_i $(i=0,1,\ldots,\ell-2)$ と同様の評価をそれぞれ得る．これから，補題 6.33 を得る．

（第10段）最後に，第5段の**補助補題**の証明を行う．この証明は勝田 篤氏によるものである．証明は10の小ステップに分かれる．

（第10-1段）$U\in\Omega_{\ell-1}^{\varepsilon}$ より，$\left|\frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| < \varepsilon$ $(\forall\, i=0,1,\ldots,\ell-2)$ なのであるから,

$$\left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_i}{u_i}\right| < (\ell-1)\varepsilon = \varepsilon' \quad (\forall\, i=1,2,\ldots,\ell-1) \tag{6–10–1}$$

すなわち,

$$\frac{\alpha_i}{u_i} - \varepsilon' < \frac{\alpha_0}{u_0} < \frac{\alpha_i}{u_i} + \varepsilon' \quad (\forall\, i=1,2,\ldots,\ell-1) \tag{6–10–2}$$

（第10-2段）次の不等式 (6–10–3) が成立する

$$\frac{1}{u_i}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-\frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0}\right) \leq \frac{\alpha_i/\alpha_0}{u_i}-\frac{\varepsilon'}{\alpha_0} \leq \frac{1}{u_0} \tag{6–10–3}$$

実際，$\alpha_i \in [\rho_0, \rho_1]\ (i=0,\cdots,\ell-1)$ なのであるから，$\rho_0 \leq \alpha_i$ かつ $\alpha_0 \leq \rho_1$．ゆえに $\rho_0\alpha_0 \leq \rho_1\alpha_i$．これから $\frac{1}{u_i}\frac{\rho_0}{\rho_1} \leq \frac{1}{u_i}\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$．一方，$\alpha_0 \geq \rho_0$ より，$\frac{\varepsilon'}{\rho_0} \geq \frac{\varepsilon'}{\alpha_0}$．よって最初の不等式が出た．第2の不等式には $\frac{\alpha_i}{u_i} - \varepsilon' \leq \frac{\alpha_0}{u_0}$ を示せばよいが，これは (6–10–2) 式そのものである．

（第10-3段）(6–10–3) の左辺は下から次のように評価される：

$$\frac{1}{u_i}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-\frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0}\right) \geq \frac{1}{u_i}\left(\frac{1}{1+\varepsilon'}-C_6\right) \geq \frac{1}{u_i}\left(1-2C_6\right). \tag{6–10–4}$$

実際，(6–10–4) の第1の不等式は $\frac{\rho_1}{\rho_0} \leq 1+\varepsilon'$ より $\frac{\rho_0}{\rho_1} \geq \frac{1}{1+\varepsilon'}$ であることと，仮定 $\varepsilon' < C_6\,\rho_0$ から $\frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0} \leq \frac{\varepsilon'}{\rho_0} \leq C_6$ となることからいえる．第2の不等式は $\frac{1}{1+\varepsilon'} - C_6 \geq 1-2C_6$, つまり $\frac{1}{1+\varepsilon'} \geq 1 - C_6$ を示せばよいが，これには

$$(1+\varepsilon')(1-C_6) \leq (1+\varepsilon')\left(1-\frac{1}{200}\right) = (1+\varepsilon')\frac{199}{200} \leq 1$$

が成り立つように，$\varepsilon' \leq \frac{1}{199}$ となるように取っておけばよい．

（第10-4段）次の不等式が成り立つ：

$$\frac{1}{u_0} \leq \frac{1}{u_i}\frac{\alpha_i}{\alpha_0}+\frac{\varepsilon'}{\alpha_0} \leq \frac{1}{u_i}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0}\right) \leq \frac{1}{u_i}(1+\varepsilon'+C_6) \leq \frac{1}{u_i}(1+2C_6). \tag{6–10–5}$$

実際，第1式の不等式は (6–10–2) である．第2の不等式は，$\alpha_i \in [\rho_0, \rho_1]$, $\rho_0 \leq \alpha_0$ より，$\frac{\alpha_i}{\alpha_0} \leq \frac{\rho_1}{\rho_0}$．また $\rho_0 \leq \alpha_0$ より $\frac{1}{\alpha_0} \leq \frac{1}{\rho_0}$ なので，合わせて第2の不等式が出た．第3の不等式は仮定 $\frac{\rho_1}{\rho_0} \leq 1+\varepsilon'$ 及び $\frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0} \leq \frac{\varepsilon'}{\rho_0} \leq C_6$ (ここに仮定 $\varepsilon' \leq C_6\rho_0$ と $0 < u_i \leq 1$ を使った) から導かれる．第4の不等式は仮定 $\varepsilon' \leq C_6 \min\{\rho_0, 1\} \leq C_6$ からいえる．

（第10-5段）次の不等式が成り立つ：

$$(1-3C_6)\,u_i \leq \frac{u_i}{1+2C_6} \leq u_0 \leq \frac{u_i}{1-2C_6} \leq (1+3C_6)u_i. \tag{6–10–6}$$

実際，第1の不等式は $0 \le u_i$ より $1-3C_6 \le \frac{1}{1+2C_6}$ のことであるが，これは $(1-3C_6)(1+2C_6) = 1 - C_6 - 6C_6 \le 1$ より出る．同様に，第4の不等式は $\frac{1}{1-2C_6} \le 1+3C_6$ を意味する．これは $C_6 < \frac{1}{200}$ としているので，特に，$1-2C_6 > 0$ 及び $(1-2C_6)(1+3C_6) = 1 + C_6 - 6{C_6}^2 \ge 1$ となるから出る．

第2と第3の不等式は次のようにしてわかる：(6–10–5) から

$$\frac{1}{u_0} \le \frac{1}{u_i}(1+2C_6) \tag{6–10–7}$$

である．(6–10–3) と (6–10–4) から

$$\frac{1}{u_0} \ge \frac{1}{u_i}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\varepsilon' u_i}{\rho_0}\right) \ge \frac{1}{u_i}(1-2C_6). \tag{6–10–8}$$

両者を合わせて，

$$\frac{1}{u_i}(1-2C_6) \le \frac{1}{u_0} \le \frac{1}{u_i}(1+2C_6),$$

すなわち

$$\frac{u_i}{1+2C_6} \le u_0 \le \frac{u_i}{1-2C_6}$$

となる．これは (6–10–6) の第2，第3の不等式である．

以上の議論において，u_0 と u_i の役割を換えて，同様に，

$$(1-3C_6)\,u_0 \le u_i \le (1+3C_6)\,u_0 \tag{6–10–9}$$

が成り立つ．

（第10-6段）　まず $U \in X_{\ell+1}$ の定義と (6–10–9) と $u_0 \ge 0$ から

$$1 = \sum_{i=0}^{\ell} u_i = u_0 + \sum_{i=1}^{\ell} u_i \ge u_0 + \ell(1-3C_6)u_0 \ge \ell(1-3C_6)\,u_0. \tag{6–10–10}$$

ゆえに

$$u_0 \le \frac{1}{\ell(1-3C_6)} \le \frac{1}{\ell}\,(1+4C_6). \tag{6–10–11}$$

(6–10–11) の第2の不等式は $(1-3C_6)(1+4C_6) = 1 + C_6 - 12{C_6}^2 > 1$. というのは $\frac{1}{400} < C_6 < \frac{1}{200}$ なので，$12{C_6}^2 < \frac{12}{160000} \leq \frac{1}{400} < C_6$ となるからである.

他方，(6–10–9) の最後の不等式 $u_i \leq (1+3C_6)\, u_0$ と仮定 $u_\ell \leq C_6$ から

$$1 = \sum_{i=0}^{\ell} u_i = \sum_{i=0}^{\ell-1} u_i + u_\ell \leq \ell\, u_0(1+3C_6) + C_6. \tag{6–10–12}$$

したがって

$$u_0 \geq \frac{1-C_6}{\ell(1+3C_6)} \geq \frac{1}{\ell}\,(1-4C_6). \tag{6–10–13}$$

(6–10–13) の2番目の不等式は $(1+3C_6)(1-4C_6) = 1 - C_6 - 12{C_6}^2 < 1 - C_6$ からいえる.

（第10-7段）$i = 0, 1, \ldots, \ell-1$ についても次式が成立する：

$$\frac{1}{\ell}\,(1-8C_6) \leq u_i \leq \frac{1}{\ell}\,(1+8C_6). \tag{6–10–14}$$

実際，u_0 については第10-6段で示した．$u_i\,(i = 1, \ldots, \ell-1)$ については，u_0 の不等式に (6–10–6) を使って，

$$(1-4C_6)\,\frac{1}{\ell}(1-3C_6) \leq (1-3C_6)\,u_0 \leq u_i \leq (1+3C_6)u_0 \leq (1+3C_6)\,\frac{1}{\ell}(1+4C_6). \tag{6–10–15}$$

ここで最左辺については $(1-4C_6)(1-3C_6) = 1 - 7C_6 + 12{C_6}^2 \geq 1 - 8C_6$ から求める式を得る．また最右辺についても，$C_6 - 12{C_6}^2 > 0$ だから，$(1+3C_6)(1+4C_6) = 1 + 7C_6 + 12{C_6}^2 \leq 1 + 8C_6$ となる．したがって求める不等式を得る.

（第10-8段）次の不等式が成り立つ：$i = 1, \ldots, \ell-1$ について

$$(1-9C_6)\,\ell\,\rho_0 \leq \frac{\ell\,\rho_0}{1+8C_6} \leq \frac{\alpha_i}{u_i} \leq \frac{\ell\,\rho_1}{1-8C_6} \leq \ell\,\rho_1(1+9C_6). \tag{6–10–16}$$

実際，(6–10–14) より $1-8C_6 \leq \ell\, u_i \leq 1+8C_6$．一方 $\rho_0 \leq \alpha_i \leq \rho_1$ であるので，$\frac{\rho_0}{1+8C_6} \leq \frac{\alpha_i}{\ell\, u_i} \leq \frac{\rho_1}{1-8C_6}$ である．ゆえに $1-9C_6 \leq \frac{1}{1+8C_6}$ 及び $\frac{1}{1-8C_6} \leq 1+9C_6$

を示せばよい．これは $(1-9C_6)(1+8C_6) = 1 - C_6 - 72{C_6}^2 \leq 1$ 及び $(1-8C_6)(1+9C_6) = 1 + C_6 - 72{C_6}^2 > 1$ より示される（実際，$\frac{1}{400} < C_6 < \frac{1}{200}$ なので，$C_6 - 72{C_6}^2 = C_6(1-72C_6) > 0$ である）．

（第 10-9 段）α_ℓ については $\left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\right| < C_6$ より，同様に

$$(1-9C_6)\,\ell\,\rho_0 \leq \frac{\alpha_\ell}{u_\ell} \leq \ell\,\rho_1\,(1+9C_6). \tag{6–10–17}$$

ここで $u_\ell \leq C_6$ より

$$\alpha_\ell \leq \ell\,\rho_1\,(1+9C_6)\,u_\ell \leq \ell\,\rho_1(1+9C_6)\,C_6. \tag{6–10–18}$$

（第 10-10 段）そこでいよいよ，$f(U) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i}$ を評価する．実際，上からの評価は次のようになる：(6–10–18) を使い，

$$\begin{aligned} f(U) &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i} + \frac{{\alpha_\ell}^2}{u_\ell} \leq \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\alpha_i}{u_i}\,\rho_1 + \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}\cdot\alpha_\ell \\ &\leq \ell\,(1+9C_6)\,\ell\,\rho_1\,\rho_1 + (1+9C_6)\,\ell\,\rho_1\cdot(1+9C_6)\,(\ell\,\rho_1)\,C_6 \qquad (6\text{–}10\text{–}19) \end{aligned}$$

ここで第 2 項に $1+9C_6 \leq 2$ を使って

$$\begin{aligned} &\leq \ell^2\,{\rho_1}^2 + 9C_6\,\ell^2\,{\rho_1}^2 + 4(\ell\,\rho_1)^2 C_6 \\ &= \ell^2\,{\rho_1}^2\,(1+13C_6) \\ &\leq \frac{11}{10}\,\ell^2\,{\rho_1}^2. \qquad (6\text{–}10\text{–}20) \end{aligned}$$

最後の不等式は $C_6 < \frac{1}{200}$ なので，$1 + 13\,C_6 < 1 + 13\frac{1}{200} < \frac{11}{10}$ となる．

一方，

$$\begin{aligned} f(U) &= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i} \geq \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{\alpha_i}{u_i}\,\rho_0 \qquad\qquad (\alpha_i \geq \rho_0\,(i=0,\ldots,\ell-1) \text{ を使った}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \ell\big((1-9C_6)\,\ell\,\rho_0\big)\,\rho_0 \qquad\qquad ((6\text{–}10\text{–}16)\text{ を使った}) \\
&= (1-9C_6)\,(\ell\,\rho_0)^2 \\
&\geq \frac{9}{10}\,(\ell\,\rho_0)^2.
\end{aligned} \tag{6–10–21}
$$

ここで $1-9C_6 \geq 1-9\,\frac{1}{200} \geq \frac{9}{10}$ を使った.

以上より, (6–10–20) と (6–10–21) より

$$
\frac{9}{10}\,(\ell\,\rho_0)^2 \leq f(U) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i} \leq \frac{11}{10}\,\ell^2\,{\rho_1}^2 \tag{6–10–22}
$$

を得た. (6–10–22) は欲しかった不等式

$$
\sqrt{\frac{9}{10}}\,\ell\,\rho_0 \leq \sqrt{f(U)} \leq \sqrt{\frac{11}{10}}\,\ell\,\rho_1 \tag{6–10–23}
$$

である. 補助補題の証明を終え, 補題 6.33 の証明が完了した.□

証明 (補題 6.34 の証明)

(第1段) $\alpha_i := \overline{x_i x_{i+1}}$ とおくと,

$$
E_U((x_i)) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i} = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{{\alpha_i}^2}{u_i} = f(U)
$$

なので, $\Phi(s) := \varphi\big(\frac{s^2}{4}\big)$ とおいて, 補題 6.33 を適用する. 補題 6.32 により, $\mathrm{supp}(\Phi) \cap [\ell\,\rho_0, \ell\,\rho_1] = \emptyset$ は満たされる. (6.176) より, u_ℓ の冪に関する補題 6.33 の積分の評価が使える.

(第2段) 一方, $\widetilde{E}((x_i), U) = E_U((x_i))$ の臨界点の集合は $j_U((x_i))$ が閉測地線で, $\frac{\alpha_0}{u_0} = \cdots = \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}$ を満たす $((x_i), U)$ の全体であった (命題 6.6 の証明中の (6.63)). これから $\alpha_\ell < C_2$ (C_2 は補題 6.33 の証明中のもの) ならば,

$$
\mathrm{supp}\left(\varphi \circ \frac{\widetilde{E}}{4}\right) \cap \{\widetilde{E}\text{ の臨界点の集合}\} = \emptyset \tag{6.276}
$$

となる．実際，$((x_i), U)$ が (6.277) の左辺の集合に属するものとすると，$U \in \operatorname{supp}(\Phi \circ \sqrt{f})$．$\frac{\alpha_0}{u_0} = \cdots = \frac{\alpha_{\ell-1}}{u_{\ell-1}} = \frac{\alpha_\ell}{u_\ell}$ より，$U \in \Omega^{\varepsilon}_{\ell-1}$．しかし，補題 6.33 の証明中の (6.264) か，または (6.265) が成立するので，このようなことは起こり得ない．

（第3段）そこで，$K \geq \frac{\ell+1}{2} n$ ($n := \dim M$) とし，$\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 関数 ψ_ℓ としては，補題 6.33 の D_K と その証明中の C_2 に対して

$$\operatorname{supp}(\psi_\ell) \subset (-\infty, \min\{C_2, D_K\})$$

となるような関数で，原点 0 の近傍で 1 となるものを取っておく．このとき，(6.277) より，$\widetilde{E}$ の臨界点 $((x_i), U)$ で，積分 A_ℓ の被積分関数の台に属するものは存在し得ない．(2) が示された．

（第4段）さらに，${P_\ell}^{k+}$ の z に関する最大冪は $z^{\frac{\ell+1}{2} n}$ であったので，補題 6.33 より，$n \geq 3$ のとき，

$$|A_\ell(z)| \leq |z|^{K - \frac{\ell+1}{2} n} C_K \int_{M_0^{\ell+1}} \overline{x_\ell x_0}^{2-n} v_0(x_0) \cdots v_\ell(x_\ell), \tag{6.277}$$

$n = 2$ のとき，

$$|A_\ell(z)| \leq |z|^{K - \frac{\ell+1}{2} n} C_K \int_{M_0^{\ell+1}} |\log(\overline{x_\ell x_0})| \, v_0(x_0) \cdots v_\ell(x_\ell), \tag{6.278}$$

となる．

（第5段）ここで $n \geq 3$ のときは，

$$\begin{aligned}
&\int_{M_0^{\ell+1}} \overline{x_\ell x_0}^{2-n} v_0(x_0) \cdots v_\ell(x_\ell) \\
&\qquad \leq C \int_M v_g(x_0) \cdots \int_M v_g(x_{\ell-1}) \times \int_M \overline{x_\ell x_0}^{2-n} v_g(x_\ell) \\
&\qquad \leq C' \int_0^{\mathrm{inj}} r^{2-n} r^{n-1} \, dr < \infty,
\end{aligned} \tag{6.279}$$

また $n = 2$ のときも，

$$\int_{M_0^{\ell+1}} |\log(\overline{x_\ell x_0})|\, v_0(x_0)\cdots v_\ell(x_\ell)$$
$$\le C\int_M v_g(x_0)\,\cdots\int_M v_g(x_{\ell-1})\times\int_M |\log(\overline{x_\ell x_0})|\, v_g(x_\ell)$$
$$\le C'\int_0^{\mathrm{inj}} |\log r|\, r\, dr<\infty. \tag{6.280}$$

ゆえに，$K=\frac{\ell+1}{2}n$ に取り，$z\to\infty$ のとき，$A_\ell(z)$ は有界で，(1) を得た．□

注意 6.35 (1) 補題 6.34 (1) と 補題 6.20 (1) より，$\widehat{A_\ell}(\sigma,t)=O\big(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\big)$ である．

(2) $t=0$ の場合の 補題 6.32 について．$t=0$ の場合，$0<\rho_0<\rho_1<\mathrm{inj}$ 及び $\ell_0=0$ に取る．このとき 正数 $\beta>0$ としては，(4′)　$[0,2\sqrt{\beta}]\cap\mathcal{L}=\{0\}$ が成り立つように定める．(2), (3), (5) は不要．$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 関数 φ については $t=0$ の場合の図 6.10 のように $\mathrm{supp}(\varphi)\subset[-\beta,\beta]$ かつ 原点 0 の近傍上で 1 となるように定める．このとき，補題 6.32 の証明をそのままたどることによって，

$$\text{(1)}\quad \sum_{\ell=1}^{\infty}|I_\ell^+(\sigma,0)|=O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)\qquad \text{かつ}$$

$$\text{(6)}\quad \widehat{\widehat{Z}}(\sigma,0)=\int_{M_0\times\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\xi_0}{4}\,\overline{x_0x_1}^2+\sqrt{-1}\,y\left(-\frac{\overline{x_0x_1}^2}{4}\right)-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right)$$
$$\times\,\varphi\left(\frac{\overline{x_0x_1}^2}{4}\right)P_0^{k\,+}((x_0,x_1),1,z)\,v_0(x_0)\,dy+O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$$

が得られる．ここで $x_1=x_0$, $P_0^{k\,+}((x_0,x_1),1,z)=\big(\frac{z}{4\pi}\big)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{k}U_j(x_0,x_1)\,z^{-j}$ である．

6.9 主定理 6.23 の証明

本節では定理 6.23 の証明を行う．定義 6.17 を思い起こそう．前節の記号などは，そのまま使う．

証明 （第 1 段）(I)　$t\notin\big\{\frac{L^2}{4}\big|L\in\mathcal{L}\big\}$ の場合．　$\ell=0,1,\ldots,\ell_0$ に対して，ψ_ℓ を，補題 6.34 の原点 0 の近傍上で 1 となる $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台をもつ C^∞ 関数とし，

$$\varphi_\ell := \varphi \circ \frac{\widetilde{E}}{4}\,(1-\psi_\ell)\,{P_\ell}^{k\,+},$$

$$B_\ell(z) := \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4}\,\widetilde{E}((x_i),U)}\,\varphi_\ell((x_i),U,z)\,\widetilde{\lambda_{\ell+1}}, \tag{6.281}$$

$$J_\ell(z) := (-1)^\ell \int_{M_0^{\ell+1}\times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4}\,E_U((x_i))}\,{P_\ell}^{k\,+}((x_i),U,z)\,\varphi\!\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)\widetilde{\lambda_{\ell+1}} \tag{6.282}$$

とおく．このとき

$$J_\ell(z) = (-1)^\ell(A_\ell(z) + B_\ell(z))$$

である．φ はコンパクトな台をもつので，φ_ℓ もコンパクトな台をもち，$\mathrm{supp}(\varphi_\ell)\cap\{\widetilde{E}$ の臨界点$\} = \emptyset$ である．実際，仮定 $2\sqrt{t}\in\mathcal{L}$ から，補題 6.32 (3) より，$[2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}]\cap\mathcal{L} = \emptyset$．一方，$\mathrm{supp}(\varphi)\subset[t-\beta, t+\beta]$ としていたので，$\mathrm{supp}(\varphi_\ell)\cap\{L^2 \,|\, \widetilde{E}$ の臨界値, $L\in\mathcal{L}\}\subset[t-\beta,t+\beta]$ とならねばならないが，上記よりこのようなことは起こらないからである．

（第 2 段）よって鞍部点法定理 6.28 (1) が関数 B_ℓ に対して適用することができ，$z\to\infty$ のとき，$B_\ell(z)$ は有界である．ゆえに補題 6.20 (1) より，$\widehat{B_\ell}(\sigma,t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ となる．一方，$A_\ell(z)$ は補題 6.34 (1) により $z\to\infty$ のとき，有界である．したがって，$\widehat{A_\ell}(\sigma,t) = O(\frac{1}{\sigma})$ となる．ゆえに，

$$\widehat{J_\ell}(\sigma,t) = O\!\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.283}$$

が示された．ゆえに，(6.283), 補題 6.32 (6) と 注意 6.35 (2) を合わせて，

$$\widehat{\widehat{Z}}(\sigma,t) = O\!\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.284}$$

を得た．

（第 3 段）任意の正数 $\alpha > 0$ に対して，$\widehat{z^\alpha\,\widetilde{Z}}(\sigma,t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ となることは次のように示される．まず $\widehat{z^\alpha\,J_\ell(z)}(\sigma,t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$ については，定理 6.28 (1) を $z^b = z^\alpha$ とおいて適用し，補題 6.20 (1) から出る．次に，補題 6.34 におい

て，$A_\ell(z)$ と同様に $z^\alpha A_\ell(z)$ が $z \to \infty$ のとき，有界であることを示す必要がある．このために，$K \geq \alpha + \frac{\ell+1}{2} n$ として，補題 6.33 を適用する．補題 6.32 (6) と命題 6.27 において，$z^\alpha \widetilde{Z}(z)$ に対応する同様の主張を得るためには 補題 6.20 において，z^β $(\beta \geq 0)$ に対する擬フーリエ変換に対する同様の評価を行う必要があるが，これについては省略する．

（第4段）(II) $t \in \left\{\frac{L^2}{4} \middle| L \in \mathcal{L}\right\}$ の場合．$\alpha = 0$ のとき示す．$\alpha > 0$ のときも同様に示されるので省略する．まず，$\widetilde{Z}(z) =_F \sum_{p=0}^{\infty} f_p^0(z)\, e^{-\frac{z\, L_p{}^2}{4}}$ と展開されるかどうかについては，$f_p^0(z) := \widetilde{Z}(z)\, e^{\frac{z\, L_p{}^2}{4}}$ とおいたとき，定義 6.17 の (a) は (I) で既に示したので，(b), すなわち，

$$\widehat{\widehat{Z}}\left(\sigma, \frac{L_p{}^2}{4}\right) = \widehat{f_p^0}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0 \frac{L_p{}^2}{4}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.285}$$

を示せばよい．これは

$$\begin{aligned}
\widehat{f_p^0}(\sigma, 0)\, e^{-\xi_0 \frac{L_p{}^2}{4}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Z}(\xi_0 + \sqrt{-1}\, y)\, e^{\xi_0 \frac{L_p{}^2}{4} + \sqrt{-1}\, y \frac{L_p{}^2}{4}} \\
&\qquad \times e^{-\sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2} dy \times e^{-\xi_0 \frac{L_p{}^2}{4}} \\
&= \widehat{\widehat{Z}}\left(\sigma, \frac{L_p{}^2}{4}\right).
\end{aligned} \tag{6.286}$$

この (6.287) より，(6.286) は明らかに成立している．

（第5段）次に，$f_p^0(z)$ としては，定義 6.17 (3) にある T_0 型 $(\alpha = 0)$ の関数を見出さねばならない．各 $L_p \in \mathcal{L}$ は非退化で，$L_p{}^2$ を臨界値とする E の臨界点の集合は $\bigcup_{\lambda=1}^{\Lambda} W_\lambda$ と与えられていた．ここに W_λ は指標 j_λ, 退化次数 n_λ に非退化臨界部分多様体となる．命題 6.6 (2) より，$h^{-1}(W_\lambda \times X_{\ell+1})$ は次元 $n_\lambda + \ell + 1$, 指標 j_λ の $\widetilde{E}$ に対応する $M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}$ の非退化臨界部分多様体となっている．ここで $M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}$ 上の 1 の分割 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ として，$h^{-1}(W_\lambda \times X_{\ell+1})$ の近傍上で $\varphi_\lambda = 1$ となるものを与えておく．このとき，(6.282) の $B_\ell(z)$ は次のようになる：

$$B_\ell(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \int_{M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}} e^{-\frac{z}{4} E_U((x_i))} P_\ell{}^{k+}((x_i), U, z)\, \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right) \times (1 - \psi_\ell(\overline{x_\ell x_0}))\, \varphi_\lambda((x_i), U)\, \widetilde{\lambda_{\ell+1}}. \tag{6.287}$$

（第 6 段）さらに補題 6.34 (2) により，$\mathrm{supp}(\varphi_\ell\, \varphi_\lambda)$ 内の $\widetilde{E}$ の臨界点の集合は $h^{-1}(W_\lambda \times X_{\ell+1})$ と一致する．したがって，$S := M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}$, $N := n\,(\ell+1) + \ell$, $W := h^{-1}(W_\lambda \times X_{\ell+1})$, $w := n_\lambda + \ell + 1$, $j_W := j_\lambda$ として，鞍部点法定理 6.28 (2) を適用する．そのとき，

$$\begin{aligned} B_\ell(z) &= \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{s=0}^{\frac{\ell+1}{2}n} \int_{M_0^{\ell+1} \times X_{\ell+1}} z^s\, e^{-\frac{z}{4}\widetilde{E}} \left(\varphi \circ \frac{\widetilde{E}}{4}\right) (1 - \psi_\ell)\, \varphi_\lambda\, P_{\ell,\,s}^k\, \widetilde{\lambda_{\ell+1}} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{s=0}^{\frac{\ell+1}{2}n} z^s \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{n(\ell+1)-(n_\lambda+1)}{2}} e^{\{\sqrt{-1} j_\lambda \frac{\pi}{2} - z \frac{L_p{}^2}{4}\}} \\ &\qquad \times \left(\sum_{k=0}^{K} a_{k,\lambda}^{(\ell)}\, z^{-k} + r_{K,\lambda}^{(\ell)}(z)\, z^{-K}\right) \end{aligned} \tag{6.288}$$

ここで，$\mathrm{Im}(z) \to \infty$，$\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ のとき，$r_{K,\lambda}^{(\ell)}(z) \to 0$ である．したがって，(6.289) を z について降冪の順に整理して，

$$B_\ell(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} e^{\sqrt{-1} j_\lambda \frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{z L_p{}^2}{4}}\, (2\pi)^{\frac{(\ell+1)n-(n_\lambda+1)}{2}} \left\{a_{0,\lambda}^{(\ell)}\, z^{\frac{n_\lambda+1}{2}} + \cdots\right\} \tag{6.289}$$

（第 7 段）ここで $a_{0,\lambda}^{(\ell)}$ の符号は次のようになる：

$$\begin{aligned} a_{0,\lambda}^{(\ell)} \text{ の符号} &= P_{\ell,\frac{\ell+1}{2}n} \text{ の符号} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{\ell+1}{2}n} V_{-1}(x_0, x_1) \cdots V_{-1}(x_{\ell-1} x_\ell)\, U_0(x_\ell . x_0) \text{ の符号} \\ &\qquad (\text{ただし } \rho_0 < \overline{x_i x_{i+1}} < \rho_1\ (i = 0, \ldots, \ell-1),\ \overline{x_\ell x_0} < \rho_1 \text{ のとき}) \\ &= (-1)^\ell \end{aligned} \tag{6.290}$$

である（命題 6.11 参照）．さらに，

$$\widehat{\widehat{Z}}(\sigma,t) = \sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell \left(\widehat{A_\ell}(\sigma,t) + \widehat{B_\ell}(\sigma,t)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (\text{補題 } 6.32\ (6))$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell \widehat{B_\ell}(\sigma,t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \quad (\text{補題 } 6.34\ (1)) \tag{6.291}$$

となる．したがって，

$$f_p^0(z) := \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} e^{\sqrt{-1}j_\lambda \frac{\pi}{2}} \sum_{\ell=0}^{\ell_0}(2\pi)^{\frac{(\ell+1)\,n-(n_\lambda+1)}{2}} (-1)^\ell \left\{a_{0,\lambda}^{(\ell)}\, z^{\frac{n_\lambda+1}{2}} + \cdots\right\} \tag{6.292}$$

とおくと，これは求める形をした T_0 型関数で，定理 6.23 の求める (6.169) の a_0 は

$$a_0 = \sum_{\ell=0}^{\ell_0}(2\pi)^{\frac{(\ell+1)\,n-(n_\lambda+1)}{2}} (-1)^\ell\, a_{0,\lambda}^{(\ell)} > 0 \tag{6.293}$$

となる．

（第8段）さらに，

$$\sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell B_\ell(z) = e^{-\frac{z\,L_p{}^2}{4}} f_p^0(z) + O\big(|z|^{-K}\big) \tag{6.294}$$

なので，

$$\widehat{\sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell B_\ell}\,(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)\,L_p{}^2}{4}} f_p^0(\xi_0+\sqrt{-1}\,y)$$

$$\times\ e^{\{\sqrt{-1}ty-\sigma(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2\}}\,dy + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$$

$$= e^{-\frac{\xi_0}{4}\,L_p{}^2}\,\widehat{f_p^0}(\sigma, t-L_p{}^2) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{6.295}$$

ゆえに，

$$\widehat{\widehat{Z}}(\sigma,t) = e^{-\frac{\xi_0}{4}\,L_p{}^2}\,\widehat{f_p^0}(\sigma, t-L_p{}^2) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.296}$$

となり，これから

$$\widehat{\widehat{Z}}\left(\sigma, \frac{{L_p}^2}{4}\right) = e^{-\frac{\xi_0}{4}{L_p}^2}\,\widehat{f_p^0}(\sigma, 0) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \tag{6.297}$$

となり，この $f_p^0(z)$ が求めるものであることがわかる．定理 6.23 を得た.□

注意 6.36 特に，$L_0 = 0$ については，$\Lambda = 1$, $\ell_0 = 0$ であり，

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{M_0^1} e^{-\frac{z}{4}\overline{x_0x_1}^2}\varphi\left(\frac{\overline{x_0x_1}^2}{4}\right)P_0^{k+}((x_0,x_1),1,z)\,v_0(x_0) \quad (\text{ここで } x_1 = x_0) \\ &= \int_M \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{k} U_j(x_0,x_0)\,z^{-j}\,v_g(x_0) \\ &= \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{k} a_j\,z^{-j} \end{aligned} \tag{6.298}$$

を得る．ここで

$$a_j = \int_M U_j(x_0,x_0)\,v_g(x_0) \tag{6.299}$$

である．これは定理 6.14 基本解のトレースの漸近展開公式を k 次まで求めたものに他ならない．

注意 6.37 定理 6.14 基本解のトレースの漸近展開公式 (6.132) の，右辺の係数を表す (6.133) 式 $a_i = \int_M u_i(p,p)v_g(p)(i = 0,1,2,\ldots)$ について，一つ注意を与えよう．

(M,g) が平坦多様体，すなわち断面曲率 $K \equiv 0$ の場合には

$$\begin{cases} a_0 = \mathrm{Vol}(M,g) \\ a_i = 0\,(i = 1,2,\ldots) \end{cases}$$

が成り立つ．逆に "係数 $a_i(i = 0,1,2,\ldots)$ が上記の条件を満たすリーマン多様体 (M,g) は平坦多様体に限るか" という問題について，$\dim M = 6$ の場合では，

V.K.Patodi," *Curvature and the fundamental solution of the heat operator*", J. Indian Math. Soc. **34**(1970), pp.269–285.

によって，3 次元負定曲率 (-1) コンパクト・リーマン多様体と 3 次元単位球面との直積リーマン多様体による反例が与えられている．

一般次元では，非コンパクト型既約対称空間を普遍被覆空間にもつコンパクト・リーマン多様体とコンパクト半単純リー群でキリング形式の負定数倍を調節した直積リーマン多様体による反例が，[36], Surveys in Geometory,1980–81 の U-309〜U-312 で与えられている．

第 7 章 ◇ 負曲率多様体とスペクトル剛性定理

前章では，リーマン多様体のスペクトルがリーマン多様体の幾何に与える影響を調べた．熱の伝搬を表す熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$ の基本解のトレースを調べ，熱方程式の基本解をパラメトリックスと呼ばれるものを構成して行った．さらに，一般的なコンパクト・リーマン多様体のスペクトルから閉測地線の長さの集合が決まるという コラン＝ド＝ヴェルディィエ (Colin de Verdière) の仕事を紹介した．しかしながら，「コンパクト・リーマン多様体のスペクトルからリーマン多様体の等長類が決定されるか」，という問題には多くの反例が出されるに至った．さらに，与えられたコンパクト・リーマン多様体の近傍には，それと等しいスペクトルをもつ等長類はそれ自身のみであろうという問題についても反例が出されている．ところが，「コンパクト負曲率多様体の場合には肯定的に，スペクトルによりリーマン多様体の等長類が決定される」ことが ギルミン (V. Guillemin) と カズダン (D. Kazhdan) らにより解決されている．彼らの議論は 3 次元以上の負曲率多様体がある意味で**剛性**をもつこと，トポロジーにおけるアノソフ流などの結果を総動員することなど興味あるものである．本章では，彼らの仕事を紹介する．

7.1 ギルミン-カズダンらによるスペクトル剛性定理

(M, g) を n 次元コンパクト・リーマン多様体とする．g_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ を M 上のリーマン計量の 1 係数族で，

$$g_0 = g \text{ かつ } g_t \text{ は } t \text{ について } C^\infty \text{ に依存するとき，}$$

リーマン計量 g の**変形**と呼ばれる．リーマン計量 g の変形 $\{g_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$ が**自明な変形**であるとは，M の微分同相 Φ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ が存在して，$g_t = {\Phi_t}^* g$ $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ を満たすときをいう．ここで ${\Phi_t}^* g$ はリーマン計量 g の Φ_t に

よる引き戻しを表す.

コンパクト・リーマン多様体 (M,g) が**スペクトル剛性をもつ**とは g の任意の変形 $\{g_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$ で

$$\mathrm{Spec}(M,g_t)=\mathrm{Spec}(M,g)\quad(-\varepsilon<\forall\, t<\varepsilon)$$

を満たすものは自明な変形に限るときをいう. このとき, ギルミン-カズダンらの結果は次のようである.

定理 7.1 (**スペクトル剛性定理**) (1) コンパクト2次元負曲率リーマン多様体はスペクトル剛性をもつ.

(2) 3次元以上のコンパクト・リーマン多様体が“負の意味で $\frac{1}{n}$-ピンチされている”ならば, スペクトル剛性をもつ $(n=\dim M)$.

定義 7.2 K_π は π によって決まる (M,g) の断面曲率を表す. 正の実数 $\alpha>0$ について, リーマン多様体 (M,g) が**負の意味で α-ピンチされている**とは, 各点 $x\in M$ において, x にのみ依存する正定数 $A_x>0$ が存在して,

$$-1-\alpha<\frac{K_\pi}{A_x}<-1+\alpha$$

が任意の x における接空間 T_xM 内の2次元平面 π について成立するときをいう.

注意 7.3 (1) 正定数 $A_x>0$ $(x\in M)$ はリーマン計量 g を正定数 $c>0$ によって cg と変形したとき, 対応する断面曲率をそれぞれ, K_π^g, $K_\pi^{c\,g}$ と表すと, $K_\pi^{c\,g}=\frac{1}{c}K_\pi^g$ を満たす. 今の場合, このようなリーマン計量 cg $(c>0)$ は排除したいので, 付け加えられたものである.

(2) この α-ピンチされるという概念は負の定曲率空間とどのくらい離れているかを表したものである. $\alpha<1$ ならば, (M,g) は負曲率リーマン多様体となる. コンパクト負曲率リーマン多様体の例としては普遍被覆空間が階数1の非コンパクト型対称空間となるものがある. しかしながら, この場合, $\frac{1}{n}$-ピンチされる $(n=\dim M)$ のは負の定曲率空間の場合のみであることが知られている. 上記の負曲率多様体の例がスペクトル剛性をもつか否かは重要な問題の一つである.

7.2 証明の方針

n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M, g) が負の意味で $\frac{1}{n}$-ピンチされているとする．$-1+\frac{1}{n} < 0$ $(n = \dim M \geq 2)$ なので，(M, g) は負曲率である．g_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ を g の変形とし，

$$\mathrm{Spec}(M, g_t) = \mathrm{Spec}(M, g) \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon) \tag{7.1}$$

とする．このとき，(M, g_t) $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ も負曲率としてよい．(M, g_t) の閉測地線の長さの集合と (M, g) の閉測地線の長さの集合とは一致する（注意 6.4 (3) 及び系 6.22，コラン＝ド＝ヴェルディエ）．(M, g) の閉測地線 γ に対して $L(\gamma)$ を γ の長さとする．(M, g_t) の閉測地線 γ_t で，γ_t の g_t による長さが $L(\gamma)$ と一致するものが存在する．ここで閉測地線について次の事柄を確認しておこう：

(1) 閉測地線は $\Omega(M)$ 上のエネルギー関数の臨界点である，

(2) (M, g_t) $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ は負曲率なので，各 g_t に対応するエネルギー関数の臨界点は非退化である，

(3) $t \to 0$ のとき，g_t に対応するエネルギー関数は g に対応するエネルギー関数に "近い".

以上より，測地線 γ_t について次のように仮定できる．

$$\text{各 } \gamma_t \text{ は } t \text{ について } C^\infty \text{ に依存する，} \tag{7.2}$$

すなわち，g_t の測地線 $\gamma_t(s)$ $(s \in [0,1])$ は，γ_t の g_t に関する弧長に比例して径数づけられているとするとき，写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \ni (t, s) \mapsto \gamma_t(s) \in M$ は C^∞ 写像であるとする．$\dot{\gamma}_t(s)$ が γ_t の点 $\gamma_t(s)$ での接ベクトルを表すとき，

$$\int_0^1 (g_t)_{\gamma_t(s)}(\dot{\gamma}_t(s), \dot{\gamma}_t(s))^{\frac{1}{2}}\, ds = L \tag{7.3}$$

である．仮定 (7.2) より，(7.3) の両辺を t に関して $t = 0$ で微分でき，次の補題が成立する．

補題 7.4　（[7], p.151, Proposition 5.86）　M 上の 2 次の対称な共変テンソル場 $h \in S^2(M) = \Gamma(S^2(T^*M))$ を $h := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t$ とする．このとき，(M, g)

の任意の測地線 $\gamma \in \mathrm{Geo}(M,g)$ に対して，

$$\int_\gamma h(\dot\gamma,\dot\gamma) := \int_0^1 h_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))\,ds = 0 \tag{7.4}$$

が成り立つ．

証明 (7.3) の両辺を $t=0$ で微分して，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(g_t)_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s)\,ds &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_0^1 (g_t)_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s))^{\frac12}\,ds\\ &= 0.\end{aligned} \tag{7.5}$$

γ に沿った変分 γ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ に関する無限小変分ベクトル場を X, すなわち，各 $s \in [0,1]$ に対して，$X(s) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma_t(s) \in T_{\gamma(s)}M$ とする．このとき，

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(g_t)_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s)) = h_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)) + 2g_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\nabla_{\dot\gamma}X(s)), \tag{7.6}$$

特に，

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s)) = 2g_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\nabla_{\dot\gamma}X(s)) \tag{7.7}$$

となる．(7.5) と (7.6) より，

$$\int_0^1 \left\{h_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)) + 2g_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\nabla_{\dot\gamma}X(s))\right\}ds = 0. \tag{7.8}$$

ここで (M,g) の測地線 γ に対して，$r := g_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))$ は s に依存しない．さらに，g による γ_t の長さを $L_g(\gamma_t) := \int_0^1 g_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s))^{\frac12}\,ds$ とする．測地線 γ の長さに関する第 1 変分は零であることと (7.7) より，

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L_g(\gamma_t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s))^{\frac12}\,ds\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\,r^{-\frac12}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g_{\gamma_t(s)}(\dot\gamma_t(s),\dot\gamma_t(s))\,ds\end{aligned}$$

$$= r^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \nabla_{\dot{\gamma}} X(s))\, ds \tag{7.9}$$

となる．(7.9) を (7.8) に代入して，求める (7.4) を得る.□

定義 7.5　対称共変 2 テンソル場 $h \in S^2(M)$ が g に関して**無限小的に自明**であるとは，t について C^∞ に依存する M の 1 径数微分同相の族 Φ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ が存在し，Φ_0 は M の恒等写像で，$h = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} {\Phi_t}^* g$ と表されるときをいう.

定義 7.5 は次のように言い換えられる.

補題 7.6　X を Φ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ によって生成される M 上のベクトル場，すなわち，各点 $x \in M$ での接ベクトル $X_x \in T_x M$ は x を通る曲線 $t \mapsto \Phi_t(x) \in M$ の $t = 0$ での接ベクトル，$X_x = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t(x)$ とする．このとき，

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} {\Phi_t}^* g = \mathcal{L}_X g, \tag{7.10}$$

((7.10) の右辺は g の X に関するリー微分を表す）したがって，h が g に関して無限小的に自明である必要十分条件は M 上のベクトル場 X によって $h = \mathcal{L}_X g$ と表されることである（このようなベクトル場 X は一意的ではない．キリング・ベクトル場 X は，その定義より $\mathcal{L}_X g = 0$ となるからである).

実際，この補題の証明は [37], pp.131–133 を見られたい.

以上の 2 つの補題により，スペクトル剛性定理 7.1 の証明には，次の 2 段階を示せばよい.

(A)　(M, g) の任意の閉測地線 γ に対して，(7.4) $\int_\gamma h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ が g の変形 g_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ の無限小変形 $h = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g_t$ について成り立つとき，h が g について無限小的に自明である.

(B)　次に g の変形 g_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ が自明である.

以下の各章で，(M,g) が負曲率または負の意味で $\frac{1}{n}$-ピンチ $(n = \dim M)$ されているときに (A), (B) を示そう．このために次節では，(M,g) の余接球束 S^*M 上の測地流の言葉による言い換えを行う．

7.3 測地流ベクトル場

一般にコンパクトなリーマン多様体 (M,g) 上の余接ベクトル束 T^*M を考える．定理 7.1 の設定が必要になればそのとき指示するものとして進める．

M の**余接束**を T^*M, (M,g) の**余接球束**を S^*M, すなわち,

$$S^*M = \bigcup_{x\in M} S_x^*M, \quad S_x^*M := \{\xi \in T_x^*M \,|\, g_x(\xi,\xi) = 1\}.$$

ここで M 上のリーマン計量 g から自然に誘導される T^*M 上の計量も同じ g で書いた．

$$C^\infty(S^*M) \subset C^1(S^*M) \subset C^0(S^*M)$$

をそれぞれ，S^*M 上の実数値関数で，C^∞ 級，C^1 級，及び連続なもの全体のなす線形空間とする．

(M,g) に対応して，S^*M 上に次のような測度 μ_g が誘導される：

$$\int_{S^*M} f\,d\mu_g = \int_{\{x\in M\}} v_g(x) \int_{\{(x,\xi)\in S_x^*M\}} f(x,\xi)\,\sigma_x(\xi), \qquad f \in C^0(S^*M). \tag{7.11}$$

ここで $v_g(x)$ はリーマン多様体 (M,g) の体積要素を表し，$\sigma_x(\xi)$ は 余接空間 T_x^*M 上の内積 g_x から誘導される $n-1$ 次元球面 S_x^*M 上の自然な測度を表す $(n = \dim M)$. $L^2(S^*M) := \left\{f \,|\, \int_{S^*M} f^2\,d\mu_g < \infty\right\}$ とする．

次に，T^*M 上の局所座標系として，M の局所座標近傍系 $(U,(x^1,\dots,x^n))$ を取り，各点 $x \in U$ について，余接空間 T_x^*M の任意の元は $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i\,(dx^i)_x$ と表示されるので，$(x^1,\dots,x^n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ を $\pi^{-1}(U)$ 上の局所座標系に取ることができる (**正準座標系**と呼ばれている)．ここで $\pi : T^*M \to M$ は自然な射影である．$\pi^{-1}(U)$ 上の 1 次微分形式として

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx^i \tag{7.12}$$

を考えると，α は局所座標系の取り方に依らないので T^*M 上の 1 次微分形式となる．α は**正準 1 次微分形式**と呼ばれる．外微分した 2 次の微分形式

$$\omega := d\alpha = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx^i$$

は**正準シンプレクティック形式**と呼ばれている．

余接空間 T^*M 上の関数 $q \in C^\infty(T^*M)$ に対して，

$$\omega(H_q, \Lambda) = dq(\Lambda) \qquad (\Lambda \text{ は } T^*M \text{ 上の任意のベクトル場}) \tag{7.13}$$

を満たす T^*M 上のベクトル場 H_q が一意に定まる．H_q は q に対応する**ハミルトンベクトル場**と呼ばれている．実際，(7.13) より，正準座標系を用いて，

$$H_q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial q}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{7.14}$$

と表示される．T^*M 上の関数として，特に，r^2 が

$$r^2(x,\xi) := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \qquad \left(\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx^i \in T_x^*M \right) \tag{7.15}$$

によって定義される．ここで $g_{k\ell} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right)$ であり，行列 $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ は行列 $(g_{k\ell})_{k,\ell=1}^n$ の逆行列である．$\frac{1}{2} r^2 \in C^\infty(T^*M)$ に対応するハミルトンベクトル場は**測地流ベクトル場**と呼ばれ，$\Xi := H_{\frac{1}{2}r^2}$ と書く．ハミルトンベクトル場 Ξ は余接球束 $S^*M = \{(x,\xi) \in T^*M \,|\, r(x,\xi) = 1\}$ に接しており，Ξ の S^*M への制限は S^*M 上のベクトル場を定義する．同じ Ξ で表す．S^*M 上の測地流ベクトル場 Ξ の生成する S^*M 上の 1 径数変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は**測地流**と呼ばれている．

さて，後の議論で必要となる $L^2(S^*M)$ における調和多項式の理論について準備を進めよう．非負整数 $p = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$H^p(M)$ を $f \in L^2(S^*M)$

で，各点 $x \in M$ において，f の S_x^*M への制限 $f|_{S_x^*M}$ が T_x^*M 上の p 次の調和多項式に拡張されるもの全体をいう．ここで T_x^*M 上の p 次の**調和多項式**とは，T_x^*M 上の正準座標系 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ に関する p 次の斉次多項式であり，次のように定義される $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ に関する 2 階線形偏微分作用素 Δ_0 に関する調和関数となるものをいう：

$$\Delta_0 := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}. \tag{7.16}$$

この T_x^*M 上の微分作用素 Δ_0 は $x \in M$ のまわりの局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ の取り方には依らない．$H^p(M)$ は $L^2(S^*M)$ 内の部分空間で，次の $L^2(S^*M)$ 上の内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する位相に関して $L^2(S^*M)$ の閉集合となり，ヒルベルト空間となっている．

$$(f, f') := \int_{S^*M} f\, f'\, d\mu_g, \tag{7.17}$$

$\|f\| := \sqrt{(f,f)}$ $(f \in L^2(S^*M))$ とおく．

$f_p(x,\xi) \in H^p(M)$ は $T_x^*M \ni \xi \mapsto f_p(x,\xi)$ が T_x^*M 上の p 次調和多項式であって，$(f_p, f_p) < \infty$ を満たすものである．このとき，ヒルベルト空間として $L^2(S^*M)$ は次の直交直和分解をもつ

$$L^2(S^*M) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(M). \tag{7.18}$$

すなわち，$p \neq p'$ のとき，

$$(f, f') = 0 \qquad (f \in H^p(M),\ f' \in H^{p'}(M)) \tag{7.19}$$

であり，任意の $\in L^2(S^*M)$ は

$$f(x,\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(x,\xi) \qquad ((x,\xi) \in S^*M)$$

と表される．ここで $f_p \in H^p(M)$ かつ，$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{p=0}^{N} f_p\| = 0$ である．実際，各点 $x \in M$ に対して，n 次元ユークリッド空間 T_x^*M 上の p 次調和多

項式の S_x^*M への制限のなす空間を $H^p(S_x^*M)$ とすると，$p \neq p'$ に対して，

$$\int_{\{\xi \in S_x^*M\}} f\,f'\,\sigma_x(\xi) = 0 \qquad (f \in H^p(S_x^*M),\ f' \in H^{p'}(S_x^*M)) \tag{7.20}$$

が成り立ち，$L^2(S_x^*M) := \{f |\ \int_{S_x^*M} f^2\,\sigma_x(\xi) < \infty\}$ とすると，直交直和分解

$$L^2(S_x^*M) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(S_x^*M) \tag{7.21}$$

を得る（例えば [50], pp.20–21．[47]，p.351，命題 3.13 などを見よ）．このことと (7.11) より，(7.18), (7.19) を得る．

さて，M 上の C^∞ 対称共変 2-テンソル場全体の空間 $S^2(M)$ を次のようにして，S^*M 上の C^∞ 関数全体の空間 $C^\infty(S^*M)$ の部分空間としてみなそう．ここで任意の $h \in S^2(M)$ に対して，$\widetilde{h} \in C^\infty(S^*M)$ を次のように定義する．余接空間 T^*M 上の正準座標系 $(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ を取り，任意の $h \in S^2(M)$ を

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\,dx^i \cdot dx^j \qquad (h_{ij} = h_{ji})$$

と表す．このとき

$$\widetilde{h} := \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij}\,\xi_i \xi_j \tag{7.22}$$

と定義する．ここで $h^{ij} := \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{ik}\,g^{j\ell}\,h_{k\ell}$, $(g^{k\ell})$ は行列 (g_{ij}) の逆行列であり，$g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big)$ である．このとき，(7.22) の右辺は局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ の取り方に依らないので，$C^\infty(T^*M)$ の元を定義する．さらに，関数 $\widetilde{h} \in C^\infty(T^*M)$ の各点 $x \in M$ の余接空間 T_x^*M への制限 $\widetilde{h}|_{T_x^*M}$ は $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ について 2 次斉次多項式となっている．したがって $\widetilde{h}|_{T_x^*M}$ はその S_x^*M への制限によって一意的に決まり，$C^\infty(S^*M)$ の元を定義する．この元も同じ $\widetilde{h}$ で表す．

対応 $S^2(M) \ni h \mapsto \widetilde{h} \in C^\infty(S^*M)$ は単射である．実際，$\widetilde{h} = 0$ とすると，$\widetilde{h}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0$ $(\forall\,\xi \in T_x^*M)$ となり，このことから $h_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ となるからである．

ユークリッド空間上の調和多項式の理論を思い起こそう ([50], p.255, 定理 14.1). 余接空間 T_x^*M をユークリッド空間とみたとき, T_x^*M 上の $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ に関する 2 次斉次多項式全体のなす空間を $S^2(T_x^*M)$ とすれば, 直交直和分解

$$S^2(T_x^*M) = H^2(T_x^*M) \oplus \mathbb{R}\, r^2 \tag{7.23}$$

を得る. ここで (7.15) $r^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\, \xi_i\, \xi_j$ である. このことから, 次の直交直和分解を得る.

$$\begin{aligned} &\{\widetilde{h} \in C^\infty(S^*M) \mid h \in S^2(M)\} \\ &\quad = \big(H^2(M) \cap C^\infty(S^*M)\big) \oplus \big(H^0(M) \cap C^\infty(S^*M)\big). \end{aligned} \tag{7.24}$$

ここで (7.24) の右辺の第 2 項は $H^0(M) \cap C^\infty(S^*M) = C^\infty(M)$ である. この分解は M 上の C^∞ 対称共変 2-テンソル場の空間 $S^2(M)$ の次の直交直和分解と, 対応 $h \mapsto \widetilde{h}$ によって自然に対応しているものであることに注意する：

$$S^2(M) = \{h \in S^2(M) \mid \mathrm{Tr}_g(h) = 0\} \oplus \{f\, g \mid f \in C^\infty(M)\}. \tag{7.25}$$

ここで $\mathrm{Tr}_g(h) := \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^n g_{k\ell} h^{k\ell}$ である. 実際, 分解 (7.25) は任意の $h \in S^2(M)$ が

$$h = \left(h - \frac{\mathrm{Tr}_g(h)}{n}\, g\right) + \frac{\mathrm{Tr}_g(h)}{n}\, g$$

と表記され, $\mathrm{Tr}_g\big(h - \frac{\mathrm{Tr}_g(h)}{n}\, g\big) = 0$ であること, $h' \in S^2(M)$ が $\mathrm{Tr}_g(h') = 0$ を満たすならば, $g_x(\,,\,) = \langle\,,\,\rangle$ とするとき,

$$\langle h', f\, g\rangle = f\, \mathrm{Tr}_g(h') = 0$$

となるので, 直交直和分解 (7.25) を得る.

他方, (7.24) との関係は, $\Delta_0 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j}$, および任意の $h \in S^2(M)$ に対して, $\widetilde{h} = \sum_{i,j=1}^n h^{ij}\, \xi_i\, \xi_j$ であったので,

$$\Delta_0 \widetilde{h} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, h^{ij} = \mathrm{Tr}_g(h)$$

となり，

$$\Delta_0\widetilde{h}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Tr}_g(h)=0 \tag{7.26}$$

である．任意の $f\in C^\infty(M)$ に対して，(7.15) より，$\widetilde{g}=r^2$ であったので，

$$\widetilde{f\,g}=f\,\widetilde{g}=f\,r^2 \tag{7.27}$$

である．S^*M 上で $r^2=1$ に注意して，(7.25) より，(7.24) を得る． □

以上の準備の下で，証明すべき (A) が $C^\infty(S^*M)$ の部分空間 $H^p(M)$ $(p=0,1,2,\ldots)$ と測地流ベクトル場 Ξ の言葉でどのように書き下せるのかを示そう．

補題 7.7 g_t $(-\varepsilon<t<\varepsilon)$ を補題 7.4 におけるリーマン計量 g の変形とし，$h=\frac{d}{dt}\big|_{t=0}g_t\in S^2(M)$ とする．このとき，h に対応する $\widetilde{h}\in C^\infty(S^*M)$ は次の性質をもつ： 余接球束 S^*M 上の測地流ベクトル場 Ξ の任意の閉積分曲線 $\widetilde{\gamma}(s)$ $(0\le s\le L)$ に対して，

$$\int_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{h}:=\int_0^L\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}(s))\,ds=0 \tag{7.28}$$

が成り立つ．

証明 実際，Ξ の積分曲線 $\widetilde{\gamma}(s)$ $(s\in\mathbb{R})$ に対して，$\pi: S^*M\to M$ を自然な射影とし，M 上の曲線を $\gamma(s):=\pi\circ\widetilde{\gamma}(s)$ $(s\in\mathbb{R})$ は弧長に比例して径数づけられた (M,g) の測地線を与え，逆に (M,g) の任意の弧長に比例して径数づけられた測地線は，このように Ξ の積分曲線より得られる．

さて，$\widetilde{\gamma}$ を Ξ の S^*M における閉積分曲線とし，$\gamma(s)=\pi\circ\widetilde{\gamma}(s)$ とする．$T^*M\subset S^*M\ni\widetilde{\gamma}$ と $\dot{\gamma}\in T_{\gamma(t)}M$ とは

$$\widetilde{\gamma}(v)=g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s),v),\quad v\in T_{\gamma(s)}M$$

によって対応している．$\gamma(s)$ のまわりの局所座標系 $(x^1,\ldots,x^n)$ により，$\dot{\gamma}(s)$ を $\dot{\gamma}(s)=\sum_{i=1}^n a^i(s)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(s)}\in T_{\gamma(s)}M$ と表示すると，$\widetilde{\gamma}(s)$ の定義より，

$\widetilde{\gamma}(s) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(s))\, a^i(s)\, (dx^j)_{\gamma(s)}$ となる．ゆえに，$\widetilde{h}$ の定義より，

$$\widetilde{h}(\widetilde{\gamma}(s)) = \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\, a^k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} g_{j\ell}\, a^\ell \right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} h_{k\ell}\, a^k\, a^\ell$$
$$= h_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) \tag{7.29}$$

を得る．ゆえに (7.4) より，(7.28) を得る．□

今度は，“無限小的に自明であること” がどのように言い換えられるかを見よう．

補題 7.8 (1) M 上の任意の C^∞ ベクトル場 X に対して，T^*M 上の C^∞ 関数 q を次のように定義する．

$$q(x, \xi) := \xi(X_x) \quad (\xi \in T_x^*M). \tag{7.30}$$

このとき q の S^*M の制限 q は $H^1(M)$ に属する．逆に，$C^\infty(S^*M \cap H^1(M))$ の任意の元はこのように M 上の C^∞ ベクトル場から得られる．

(2) X と q を (1) のものとする．このとき次式が成立する．

$$\widetilde{\mathcal{L}_X g} = -2\, \Xi\, q. \tag{7.31}$$

(3) $h \in S^2(M)$ が無限小的に自明であるための必要十分条件は適切な $q \in C^\infty(S^*M \cap H^1(M))$ を選び，

$$\widetilde{h} = \Xi\, q \tag{7.32}$$

と表されることである．

証明 (3) は (2) より明らか．(1) もほぼ明らか．実際，T^*M の正準座標を $(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ とすると，M 上の C^∞ ベクトル場 X に対して，$q(x, \xi) = \xi(X_x)$ と定義される関数 q は $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ について 1 次式であるので，$\Delta_0 q = 0$ を満たし，S^*M への制限 q は $q \in C^\infty(S^*M \cap H^1(M))$ を満たす．逆に $q \in C^\infty(S^*M \cap H^1(M))$ のとき，q を T^*M 上に線形に拡張して，

$q(x,\xi)=\xi(X_x)$ $(\xi \in T_xM)$ により定義された X は M 上の C^∞ ベクトル場を与え，求めるものとなる．

(2)　X の生成する M 上の1径数変換群を $\{\Phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ とし，その T^*M への持ち上げを Φ'_s とする．すなわち，$\Phi'_s : T^*M \ni (x,\xi) \mapsto (\Phi_s(x), {}^t\Phi_{s*}^{-1}\xi) \in T^*M$（ここで ${}^t\Phi_{s*}^{-1}\xi \in T^*_{\Phi_s(x)}M$）は

$$({}^t\Phi_{s*}^{-1}\xi)(v) := \xi(\Phi_s^{-1}{}_*v) \quad (v \in T_{\Phi_s(x)}M)$$

である．$\{\Phi'_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ は T^*M の微分同相による1径数部分群となりその生成する T^*M 上のベクトル場を X' とする．

このとき，

$$X' = -H_q \tag{7.33}$$

が成り立つ．実際，$X_x = \sum_{i=1}^n \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ とすると，$q(x,\xi)=\sum_{i=1}^n \eta^i(x)\,\xi_i$ であり，(7.33) の右辺は (7.14) より，

$$-H_q = \sum_{i=1}^n \left(\eta^i\,\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\,\xi_j\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)$$

である．一方，$X'x^i = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} x^i(\Phi_s(x)) = \eta^i(x)$, かつ

$$\begin{aligned} X'\xi_i &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \xi_i\big({}^t\Phi_{s*}^{-1}\xi\big)\big) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \xi\left(\Phi_{s*}^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x^j\circ\Phi_s^{-1}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^n \xi_j\,\frac{\partial \eta_j}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{7.34}$$

となる．最後の等式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x^j\circ\Phi_s^{-1}\circ\Phi_s(x) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x^j\circ\Phi_s^{-1}(x) + \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x^j\circ\Phi_s(x) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x^j\circ\Phi_s^{-1}(x) + \eta^j(x) \end{aligned} \tag{7.35}$$

より得られる．したがって (7.33) を得る．

次に，$h := \mathcal{L}_X g$ は

$$\widetilde{h} = -\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} r^2 \circ \Phi'_s \tag{7.36}$$

を満たす．(7.36) は次のように示される．まず，(7.15) と (7.22) の定義より

$$\begin{aligned} r^2 = r^2(x,\xi) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j = \widetilde{g} \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \tag{7.37}$$

である．ここで (7.37) の右辺において，M 上のベクトル場 X, Y に対し，T^*M 上の関数 $X \bullet Y \in C^\infty(T^*M)$ を，$(X \bullet Y)(\xi) := \xi(X)\,\xi(Y)$ $(\xi \in T^*M)$ と定義する．したがって，

$$r^2 \circ \Phi'_s = \widetilde{g} \circ \Phi'_s = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\Phi_s(x))\,\Phi_{s*}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \bullet \Phi_{s*}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{7.38}$$

となる．ここで $[X,Y]_x = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \Phi_{s*}^{-1} Y_{\Phi_x(x)}$ であるので，(7.36) の右辺は

$$\begin{aligned} (7.36)\ \text{の右辺} = -\sum_{i,j=1}^n \bigg\{ &X\,g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \frac{\partial}{\partial x^j} + g^{ij}\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] \bullet \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &+ g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \left[X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\bigg\} \end{aligned} \tag{7.39}$$

となる．他方，$h = \mathcal{L}_X g$ に対しては，M 上のベクトル場 Y, Z について，$h(Y,Z) = X\,g(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])$ なので，

$$\begin{aligned} \widetilde{h} &= \sum_{i,j=1}^n h^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k,\ell,i,j=1}^n g^{ik}\,g^{j\ell}\,h_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^k} \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell} \\ &= \sum_{k,\ell,i,j=1}^n g^{ik}\,g^{j\ell}\left\{X\,g_{ij} - g\left(\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right], \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \left[X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x^k} \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell} \tag{7.40}$$

となる．ここで，$\sum_{ij=1}^n g^{ik}\, g^{j\ell}\, X\, g_{ij} = -X\, g^{k\ell}$, さらに,

$$\sum_{k,\ell,i,j=1}^n g^{ik}\, g^{j\ell} g\Big(\Big[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big], \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \frac{\partial}{\partial x^k} \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \sum_{i,k=1}^n g^{i\ell} \Big[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big] \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell},$$

$$\sum_{k,\ell,i,j=1}^n g^{ik}\, g^{j\ell} \Big\{ g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Big[X, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big]\Big)\Big\} \frac{\partial}{\partial x^k} \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \sum_{j,\ell=1}^n g^{j\ell} \Big[X, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big] \bullet \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

以上より，(7.36) を得る．この結果，(7.36), (7.33) より，

$$\widetilde{\mathcal{L}_X g} = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} r^2 \circ \Phi_s' = -X'\, r^2 = H_q\, r^2 = -2H_{\frac{r^2}{2}}\, q = -2\Xi\, q \tag{7.41}$$

となり，これから求める結果 (7.31) を得て，補題 7.8 の証明を終えた.□

以上によって，補題 7.8 を使い，スペクトル剛性定理 7.1 の証明の段階 (A) を示すためには次の (A′) を示せばよいことになる：

(A′)　$h \in S^2(M)$ に対し，$\widetilde{h} \in C^\infty(S^*M)$ が $\widetilde{h} \in H^2(M) + H^0(M)$ 及び S^*M 上の測地ベクトル場 Ξ の任意の閉積分曲線 $\widetilde{\gamma}$ が常に $\int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{h} = 0$ を満たすとする．このとき，$q \in H^1(M) \cap C^\infty(S^*M)$ で $\widetilde{h} = \Xi\, q$ を満たすものが存在する．

(A′) を示すためには，まずアノソフ流に関する次の定理を用いる．

定理 7.9 (リヴシック (**Livčic**))　リーマン多様体 (M, g) の余接球束 S^*M 上の測地ベクトル場 Ξ の生成する測地流 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ がアノソフ流であるとする (コンパクト・リーマン多様体 (M, g) が負曲率のときはこの条件は満たされている)．$f \in C^\infty(S^*M)$ が，Ξ の任意の閉積分曲線 $\widetilde{\gamma}$ に対して，

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f = 0$$

を満たすとする．このとき，$\Xi u = f$ を満たす $u \in C^1(S^*M)$ が存在する．

さらに，この定理 7.9 における関数 u が，実は次の定理 7.10 により，$u \in H^1(M) \cap C^\infty(S^*M)$ となる．

定理 7.10 $n(\geq 3)$ 次元コンパクト・リーマン多様体 (M,g) が $\frac{1}{n}$-ピンチされているとする．$f \in C^\infty(S^*M)$ が $f = \sum_{p=0}^{N} f_p$ ($f_p \in H^p(M)$, $p = 0,1,\ldots,N$) であり，測地流ベクトル場 Ξ の任意の閉積分曲線 $\widetilde{\gamma}$ に対して，

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f = 0$$

を満たすとする．このとき，$u \in C^\infty(S^*M)$ で，

$$u = \sum_{p=0}^{N-1} u_p, \quad u_p \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$$

かつ $\Xi u = f$ を満たすものが存在する．

定理 7.9 と 定理 7.10 より，$\frac{1}{n}$-ピンチされた $n(\geq 3)$ 次元コンパクト・リーマン多様体のときに (A′) が示されたことになる．

7.4 リヴシックの定理の証明

より一般に次の定理が成立することを示す．

定理 7.11 (リヴシック (**Livčic**)) コンパクト C^∞ 多様体 X の微分同相による 1 径数変換群 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ がアノソフ流とする（定義など必要事項は後で説明する）．$f \in C^\infty(X)$ が $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の任意の閉軌道 γ に対して，$\int_\gamma f = 0$ を満たすとする．このとき $u \in C^1(X)$ が存在して，$\Xi u = f$ が成り立つ（ここで $\Xi u := \lim_{t\to 0} \frac{u\circ\varphi_t(x) - u(x)}{t}$ $(x \in X)$ である Ξ を $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の生成する**無限小ベクトル場**という）．

以下では，次の記号などを用いる：

• $f \in C^\infty(X)$, $x \in X$, $v \in T_xX$ に対して，f の v による x での微分 $v(f)$ を $(v, f)_x$ と書く．

• X 上の流れ φ_t より，TX 上の流れが誘導される．これを φ_{t*} と書く（φ_{t*} は微分同相 φ_t の微分である）．

• X 上のリーマン計量を一つ固定し，それに関する距離関数を $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ と表す．

• X の部分多様体 Y に対して，X 上のリーマン計量より誘導される Y 上のリーマン計量による Y の距離を d^Y で表す．

• X 上の（k 次元，余次元 $n-k$ の）C^∞ **葉層** $\mathcal{F}$ とは，X の連結な k 次元部分多様体 L_α $(\alpha \in \Lambda)$ からなる族 $\mathcal{F} = \{L_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ であり，次の (1) ∼ (3) を満たすときをいう（L_α $(\alpha \in \Lambda)$ を**葉**という）：

(1) $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta$ ならば，$L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$.

(2) $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$.

(3) 各点 $x \in M$ のまわりの座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ として，$L_\alpha \cap U \neq \emptyset$ $(\alpha \in \Lambda)$ なら，$L_\alpha \cap U$ の各連結成分が $\{(x^1, \ldots, x^n) \in U |\, x^{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x^n = c_n\}$ と表されるものが取れる．ただし $c_{k+1}, \ldots, c_n$ は適当な定数である．

• Y を C^∞ 葉層 $\mathcal{F}$ の1つの葉とするとき，d^Y を $d^{\mathcal{F}}$ とも書く．

• X 上の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}$ に対して，$V(\mathcal{F}) := \bigcup_{x \in X} T_x(L_x)$ とおく．ここで L_x は x を通る $\mathcal{F}$ の葉を表す．$V(\mathcal{F})$ は接束 TX の部分束となる．

定義 7.12 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が X 上の**アノソフ流**であるとは，次の性質を満たす3つの葉層 $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ が存在するもののことである：

(0) 3つの葉層 $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ はそれぞれ φ_t 不変である，すなわち，各葉は φ_t によって（別の）葉に写される．

(1) $\dim \mathcal{F}^0 = 1$, すなわち, $\mathcal{F}^0$ の各葉は1次元である．$\mathcal{F}$ の各葉は $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ の軌道となっている．

(2) $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ の各葉は X の C^∞ 部分多様体である．

(3) TX の2つの部分束 $V(\mathcal{F}^+), V(\mathcal{F}^-)$ はそれぞれ γ に関するヘルダー・ノルム $|\cdot|_\gamma$ について連続な部分束となるような正数 $\gamma > 0$ が存在する．

(4) $TX = V(\mathcal{F}^0) \oplus V(\mathcal{F}^+) \oplus V(\mathcal{F}^-)$ となる．ここで右辺は C^0 級の 3 つの部分束のホイットニー和である．

(5) 2 つの正数 $C > 0$ と $\alpha > 0$ が存在して次が成り立つ：

$\mathcal{F}^+$ の同じ葉にある任意の 2 点 x_1 と x_2 と $\mathcal{F}^-$ の同じ葉にある任意の 2 点 y_1 と y_2 に対して，

$$d^{\mathcal{F}^+}(\varphi_t(x_1), \varphi_t(x_2)) \le C\, e^{-\alpha\,|t|}\, d^{\mathcal{F}^+}(x_1, x_2) \qquad (\forall\ t \ge 0) \tag{7.42}$$

$$d^{\mathcal{F}^-}(\varphi_t(y_1), \varphi_t(y_2)) \le C\, e^{-\alpha\,|t|}\, d^{\mathcal{F}^-}(y_1, y_2) \qquad (\forall\ t \le 0). \tag{7.43}$$

ここで M の任意の座標近傍系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ について，U 上の連続関数 u に対して，u の**ヘルダー・ノルム** $|u|_\gamma$ とは，

$$|u|_\gamma := \sup_{x, y \in U,\, x \ne y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

のことをいう．ただし，$|x-y|^\gamma := \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}$ $(x = (x^1, \ldots, x^n),\ y = (y^1, \ldots, y^n) \in U)$ である．さらに，ベクトル束 $V(\mathcal{F}^\pm)$ が $|\cdot|_\gamma$ に関して**連続**とは，座標近傍系 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ を取ったとき，$V(\mathcal{F}^\pm)$ の座標変換関数などが $|\cdot|_\gamma$ について連続となるときをいう．

以下，$V^0 := V(\mathcal{F}^0) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{R}\,\Xi_x$, $V^+ := V(\mathcal{F}^+)$, $V^- := V(\mathcal{F}^-)$ と書く．

さて，定理 7.11 の仮定を満たす $f \in C^\infty(X)$ を取る．これに対して，X 上の 1 次微分形式 ω_f を次のように定義する：各点 $x \in X$ に対して，

$$\begin{cases} \omega_f(\Xi_x) := f(x) \\ \omega_f(v^+) := -\displaystyle\int_0^\infty (\varphi_{t*} v^+, f)\, dt \quad (\forall\ v^+ \in V_x^+ \subset T_x X) \\ \omega_f(v^-) := \displaystyle\int_{-\infty}^0 (\varphi_{t*} v^-, f)\, dt \quad (\forall\ v^- \in V_x^- \subset T_x X) \end{cases} \tag{7.44}$$

とおく．ここで (7.44) の 2 つの積分が有限であることは次のようにしてわかる．f と $x \in X$ に依存する正数 $C_{f,x} > 0$ が存在して，

$$|(v, f)| \le C_{f,x}\, \|v\| \quad (v \in T_x X) \tag{7.45}$$

となるので，アノソフ流の性質より，

$$\begin{cases} |(\varphi_{t*}v^+, f)| \le C_{f,x}\,\|\varphi_{t*}v^+\| \le C_{f,x}\,e^{-\alpha\,|t|}\,\|v^+\| & (v^+ \in V_x^+,\ t \ge 0) \\ |(\varphi_{t*}v^-, f)| \le C_{f,x}\,\|\varphi_{t*}v^-\| \le C_{f,x}\,e^{-\alpha\,|t|}\,\|v^-\| & (v^- \in V_x^-,\ t \ge 0) \end{cases}$$

これから，2つの積分は有限値となる．

命題 7.12 (3), (4) より，ω_f は X 上連続な1次微分形式である．さらにアノソフ流 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ について，$x_0 \in X$ として，x_0 を通る**正の軌道** $\gamma := \{\varphi_t(x_0)|\, t \ge 0\}$ が X で稠密となるが存在することが知られている．そこでこの γ 上の実数値関数 u を

$$u(x) := \int_0^s f(\varphi_t(x_0))\,dt \quad (x = \varphi_s(x_0),\, s \ge 0) \tag{7.46}$$

と定義する．このとき，軌道 γ 上の任意の点 x において，

$$u(\varphi_s(x)) - u(x) = \int_0^s f(\varphi_t(x))\,dt \tag{7.47}$$

が成り立つ．実際, $x = \varphi_{s_0}(x_0)$ $(s_0 \ge 0)$ とすると, (7.47) の左辺 $= u(\varphi_{s+s_0}(x_0)) - u(\varphi_{s_0}(x_0)) = \int_{s_0}^{s+s_0} f(\varphi_t(x_0))\,dt =$ (7.47) の右辺，となる．

さて，以下において，この関数 u が X 全体に C^1 級に拡張され，しかも，$du = \omega_f$ を満たすことを示そう．そうすれば，各点 $x \in X$ において，(7.44) より，

$$\Xi_x u = du(\Xi_x) = \omega_f(\Xi_x) = f(x)$$

となり，求める結論を得る．

以下では，このためにリーマン多様体 X の指数写像を

$$\Phi : T_xX \ni v_x \mapsto (x, \mathrm{Exp}_x v_x) \in X \times X$$

と表そう．このとき，TX の 0-切断の近傍 U と $X \times X$ の対角線集合の近傍 $\widetilde{U}$ が存在して，Φ は U から $\widetilde{U}$ の上への微分同相写像を与える．また，十分小

さな正数 $\delta > 0$ が存在して，$X \times X \ni (x,y)$ について距離が $d(x,y) < \delta$ を満たせば，$(x,y) \in \widetilde{U}$ となっている．そこで，

$$\Phi^{-1}(x,y) = (x, \alpha_x(y)) \in TX, \quad (\alpha_x(y) \in T_x X)$$

$$y = \mathrm{Exp}_x(\alpha_x(y)) \tag{7.48}$$

と表すことができる．さらに $\alpha_x(y) \in T_x X$ を分解 $TX = V^0 \oplus V^+ \oplus V^-$ に応じて，

$$\alpha_x(y) = \alpha_x^0(y) + \alpha_x^+(y) + \alpha_x^-(y), \tag{7.49}$$

ここで $\alpha_x^0(y) \in V_x^0$，$\alpha_x^+ \in V_x^+$，$\alpha_x^-(y) \in V_x^-$ であるとする．このとき次の命題が成立する．

命題 7.13　開区間 $(0,\delta)$ 上の正値関数 $a(\varepsilon)$ で，$a(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ ($\varepsilon \to 0$ のとき)，を満たし，かつ，軌道 γ 上の $d(x,y) < \varepsilon$ である任意の 2 点 x, y に対して，

$$|u(y) - u(x) - (\omega_f, \alpha_x(y))| \leq a(\varepsilon)$$

を満たすものが存在する．

証明　命題 7.13 から定理 7.9 が示されること．命題 7.13 と (7.45) $|(v,f)| \leq C_{f,x} \|v\|$ $(v \in T_x X)$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数 $\delta > 0$ が存在して，

$$x, y \in \gamma \quad \text{ならば} \quad |u(x) - u(y)| < \varepsilon \tag{7.50}$$

が成り立つ．γ が X で稠密であるので，(7.50) を満たす γ 上の関数 u は X 上の連続関数に一意的に拡張できる．このとき，さらに，$x, y \in X$ が $d(x,y) < \varepsilon$ を満たすならば，

$$|u(y) - u(x) - (\omega_f, \alpha_x(y))| \leq a(\varepsilon) \tag{7.51}$$

となる．なぜなら，$u \in C^0(X)$ かつ ω_f は連続なベクトル場だから，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$，$y = \lim_{n\to\infty} y_n$，$x_n, y_n \in \gamma$ とするとき，$d(x,y) < \varepsilon$ より，十分大なる $N > 1$ が存在して，$n, m \geq N$ ならば，$d(x_n, y_m) < \varepsilon$ と

なる．ゆえに，命題 7.13 を使って，$|u(x_n)-u(y_m)-(\omega_f,\alpha_{x_n}(y_m))|\leq a(\varepsilon)$ となる．ここで $\lim_{n\to\infty}u(x_n)=u(x)$, $\lim_{m\to\infty}u(y_m)=y(y)$ かつ $\lim_{n,m\to\infty}(\omega_f,\alpha_{x_n}(y_m))=(\omega_f,\alpha_x(y))$ となるので，(7.51) となる．

ここで x のまわりの正規座標近傍系 $(U,(x^1,\ldots,x^n))$ を取って，$y_i\in U$ $(i=1,\ldots,n)$ が存在して，$\alpha_x(y_i)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ と書ける．$y(\varepsilon):=\mathrm{Exp}_x(\varepsilon\,\alpha_x(y_i))$ とおく．このとき，$y(\varepsilon)=\mathrm{Exp}_x(\alpha_x(y(\varepsilon)))$ かつ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{u(y(\varepsilon))-u(x)\right\}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{(\omega_f,\alpha_x(y(\varepsilon)))+a(\varepsilon)\}\\&=(\omega_f,\alpha_x(y_i))\\&=\left(\omega_f,\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right)\quad(i=1,\ldots,n)\end{aligned}\tag{7.52}$$

となる．よって，$u\in C^1(X)$ かつ $du=\omega_f$ である．定理 7.9 を得た.□

証明 命題 7.13 の証明をする．$x\in X$ とし，$\mathcal{F}_x^+$ を x を含む $\mathcal{F}^+$ の葉とする．後で定める正数 $\delta'>0$ に対して，

$$D_x^+:=\{z\in\mathcal{F}_x^+\,|\,d^{\mathcal{F}^+}(x,z)<\delta'\}$$

とおき，さらに，$z\in D_x^+$ に対して，$\mathcal{F}_z^-$ を z を含む $\mathcal{F}^-$ の葉とし，

$$D_z^-:=\{w\in\mathcal{F}_z^-\,|\,d^{\mathcal{F}^-}(z,w)<\delta'\}$$

$$S_x:=\{w\in X|\ \text{適当な}\ z\in D_x^+\ \text{を選び},w\in D_z^-\}$$

とおく．S_x は X の余次元 1 の部分多様体であり，$\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の軌道と横断的に交わっている．ここでさらに写像 $\varpi:S_x\to D_x^+$ を $w\in S_x$ に対して，$w\in\mathcal{F}_z^-$ となる $z\in D_x^-$ を対応させることにより定義する．そのとき，S_x は写像 ϖ が射影，D_x^- を底空間とするファイバー空間となる．$\{\varphi_i\}_{t\in\mathbb{R}}$ は C^∞ 級なので，正定数 $C'>0$ が存在して，$x,y\in\gamma$, $d(x,y)<\varepsilon$ ならば，$|t_0|<C'\,\varepsilon$ かつ $\varphi_{t_0}(y)\in S_x$ となる $t_0\in\mathbb{R}$ が存在する．$\widetilde{y}:=\varphi_{t_0}(y)$ とおく．

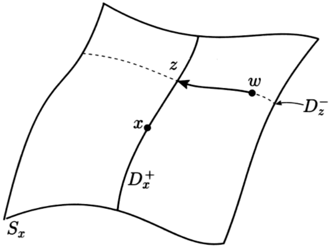


図 7.1　ファイバー空間 S_x

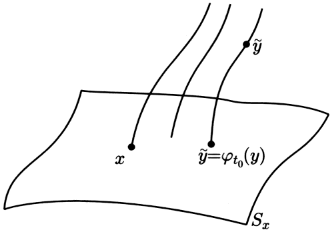


図 7.2　$\widetilde{y} \in S_x$ の定義

このとき

$$
\begin{aligned}
u(\widetilde{y}) - u(x) &= u(\widetilde{y}) - u(y) + u(y) - u(x) \\
&= \int_0^{t_0} f(\varphi_t(y))\,dt + u(y) - u(x) \\
&= f(x)\,t_0 + u(y) - u(x) + o(\varepsilon) \qquad (7.53)
\end{aligned}
$$

となる．α_x の定義と $\alpha_x(\widetilde{y}) - \alpha_x(y) = t_0\,\Xi_x + o(\varepsilon)$ かつ $(\omega_f, t_0\,\Xi_x) = t_0\,f(x)$ とを合わせて，

$$
\begin{aligned}
&|u(\widetilde{y}) - u(x) - (\omega_f, \alpha_x(\widetilde{y})| \\
&= |f(x)\,t_0 + u(y) - u(x) - (\omega_f, \alpha_x(y)) - (\omega_f, t_0\,\Xi_x)) + o(\varepsilon)| \\
&= |u(y) - u(x) - (\omega_f, \alpha_x(y))| + o(\varepsilon) \qquad (7.54)
\end{aligned}
$$

を得るので，命題 7.13 は “$x,\ y \in \gamma,\ y \in S_x$ ” の場合に証明すればよい．

さて，$x, y \in \gamma, y \in S_x, d(x,y) < \varepsilon$ かつ $y = \varphi_T(x)$ とする．任意に小さな $\varepsilon > 0$ を取ると，$T > 0$ は非常に大きな正数を取って，$e^{-\alpha T} = o(\varepsilon)$ とできる．ここで $\alpha > 0$ は命題 7.12 (5) における正数である．$\varpi(y) = \varpi(\varphi_T(x)) =: z_0$ とおく．

任意の $z \in D_x^+$ に対して，$\varphi_T(z) \in \mathcal{F}_y^+$ であり，命題 7.12 (5) により，

$$d(\varphi_T(z), y) \le d^{\mathcal{F}^+}(\varphi_T(z), y) = d^{\mathcal{F}^+}(\varphi_T(z), \varphi_T(x)) \le C\, e^{-\alpha T}\, d^{\mathcal{F}^+}(z, x)$$

となり，$y \in S_x$ かつ $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は C^∞ 級なので，実数 t_1 が存在して，

$$|t_1| \le C\, e^{-\alpha T}\, d^{\mathcal{F}^+}(z, x) \quad \text{かつ} \quad \varphi_{T+t_1}(x) \in S_x.$$

さらに

$$d^{\mathcal{F}^+}(\varpi(\varphi_{T+t_1}(z)), z_0) = d^{\mathcal{F}^+}(\varpi(\varphi_{T+t_1}(z)), \varpi(\varphi_T(x))) \le C''\, e^{-\alpha T}\, d^{\mathcal{F}^+}(z, x)$$

となる．ここで $C'' > 0$ は z に依らない正定数である．

以上のことから，$T > 0$ が十分大のとき，$z_1 \in D_x^+$ と $t_1 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$|t_1| < e^{-\alpha T},\ d^{\mathcal{F}^+}(z_1, z_0) < e^{-\alpha T},\ \varphi_{T+t_1}(z_1) \in S_x \ \text{かつ}\ \varpi(\varphi_{T+t_1}(z_1)) = z_1 \tag{7.55}$$

が成り立つ．実際，(7.55) の最後の性質 $\varpi(\varphi_{T+t_1}(z_1)) = z_1$ を満たすようにできることは，写像 $D_x^+ \ni z_1 \mapsto \varpi(\varphi_{T+t_1}(z_1)) \in D_x^+$ を考えると，$z_1, z_2 \in D_x^+$ に対して，

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{F}^+}(\varpi(\varphi_{T+t_1}(z_1), \varpi(\varphi_{T+t_1}(z_2)) &\le D\, d^{\mathcal{F}^+}(\varphi_{T+t_1}(z_1), \varphi_{T+t_1}(z_2)) \\ &\le DC\, e^{-\alpha(T+t_1)}\, d^{\mathcal{F}^+}(z_1, z_2) \end{aligned}$$

となるので，十分大なる T に対して縮小写像となり，不動点をもつ．すなわち，$\varpi(\varphi_{T+t_1}(z_1)) = z_1$ となる $z_1 \in D_x^+$ が存在する．このとき，t_1, $z_1 \in D_x^+$ が (7.55) の前半の式を満たすようにできる．このような $z_1 \in D_x^+$ と $t_1 \in \mathbb{R}$ を取り，$z_2 := \varphi_{T+t_1}(z_1)$ とおく．写像 ${\varphi_{T+t_1}}^{-1}$ は $\mathcal{F}^-$ の葉を $\mathcal{F}^-$ の別の葉に写し，かつ (7.55) より，$\varpi(z_2) = z_1$ なので，$z_2 \in D_{z_1}^-$ だから，実は，

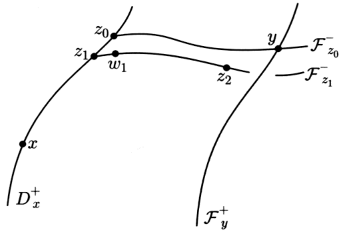


図 7.3 葉層 $\mathcal{F}^+$ と $\mathcal{F}^-$

${\varphi_{T+t_1}}^{-1}(\mathcal{F}^-_{z_1}) = \mathcal{F}^-_{z_1}$ である．さらに，命題 7.12 (5) より，$T>0$ を十分大に取ると，写像 ${\varphi_{T+t_1}}^{-1} : D^-_{z_1} \to D^-_{z_1}$ は縮小写像となっている．ゆえに，**不動点**，すなわち，

$${\varphi_{T+t_1}}^{-1}(w_1) = w_1$$

となる $w_1 \in D^-_{z_1}$ が存在する．

ここで命題 7.12 (5) より，

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{F}^-}(w_1, z_1) &= d^{\mathcal{F}^-}({\varphi_{T+t_1}}^{-1}(w_1), {\varphi_{T+t_1}}^{-1}(z_2)) \\ &\le C\, e^{-\alpha\,(T+t_1)}\, d^{\mathcal{F}^-}(w_1, z_2) = o(\varepsilon) \end{aligned} \tag{7.56}$$

となる．一方，$|t_1| = o(\varepsilon)$ より，

$$d(z_2, \varphi_T(z_1)) = d(\varphi_{T+t_1}(z_1), \varphi_T(z_1)) = o(\varepsilon).$$

$z_1 \in D^+_x,\, y = \varphi_T(x)$ より，$\varphi_T(z_1) \in \mathcal{F}^+_y$ である．したがって，

$$\begin{aligned} d(z_2, y) \le\ & d(\varphi_T(z_1), y) \le C_1\, d^{\mathcal{F}^+}(\varphi_T(z_1), \varphi_T(x)) \\ &\le C_1\, C\, e^{-\alpha\, T}\, d^{\mathcal{F}^+}(z_1, x) = o(\varepsilon) \end{aligned} \tag{7.57}$$

を得る．(7.55), (7.56) と (7.57) より，

$$-\alpha^-_{z_2}(w_1) = \alpha^-_{w_1}(z_2) \doteqdot \alpha^-_{z_0}(y) \doteqdot \alpha^-_x(y). \tag{7.58}$$

したがって，(7.58) より，

$$\int_{-T}^{0} (\varphi_{t*}(\alpha^-_{z_2}(w_1)), f)\, dt = -\int_{-T}^{0} (\varphi_{t*}(\alpha^-_x(y)), f)\, dt + o(\varepsilon) \tag{7.59}$$

を得る．$T>0$ は十分大なので，(7.59) は次式を意味する．

$$\int_{-\infty}^{0}(\varphi_{t*}(\alpha_{z_2}^{-}(w_1)),f)\,dt=-\int_{-\infty}^{0}(\varphi_{t*}(\alpha_{x}^{-}(y)),f)\,dt+o(\varepsilon). \tag{7.60}$$

以上の下で，$u(y)-u(x)$ を計算する．

$$u(y)-u(x)=\int_0^T f(\varphi_t(x))\,dt=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}, \tag{7.61}$$

ここで，

$$\begin{cases} \mathrm{I}:=\displaystyle\int_0^T\{f(\varphi_t(x))-f(\varphi_t(z_1))\}\,dt \\ \mathrm{II}:=-\displaystyle\int_T^{T+t_1}f(\varphi_t(z_1))\,dt \\ \mathrm{III}:=-\displaystyle\int_0^{T+t_1}\{f(\varphi_t(w_1))-f(\varphi_t(z_1))\}\,dt \\ \mathrm{IV}:=\displaystyle\int_0^{T+t_1}f(\varphi_t(w_1))\,dt \end{cases} \tag{7.62}$$

とおく．

(IV について)　w_1 は $\varphi_{T+t_1}(w_1)=w_1$ を満たし，Ξ の閉軌道上の f の積分が零という f の仮定より，$\mathrm{IV}=0$ である．

(II について)　(7.55) と T の取り方より，

$$|\mathrm{II}|=\left|\int_T^{T+t_1}f(\varphi_t(z_1))\,dt\right|=O(|t_1|)=o(\varepsilon).$$

(I について)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}&=\int_0^T\{f(\varphi_t(x))-f(\varphi_t(z_1))\}\,dt \\ &=\int_0^{\infty}(\varphi_{t*}(\alpha_x^{+}(z_1)),f)\,dt+o(\varepsilon) && (z_1\in D_x^{+}\text{ より}) \\ &=-\int_0^{\infty}(\varphi_{t*}(\varphi_x^{+}(z_0)),f)\,dt+o(\varepsilon) && ((7.55)\text{ より}) \end{aligned}$$

$$= -\int_0^{\infty} (\varphi_{t*}(\alpha_x^+(y), f)\,dt + o(\varepsilon) \qquad (\varpi(y) = z_0 \text{ より})$$

$$= \omega_f(\alpha_x^+(y)) + o(\varepsilon) \qquad (\omega_f \text{ の定義})$$

となる．

(III について)

$$\mathrm{III} = -\int_0^{T+t_1} \{f(\varphi_t(w_1)) - f(\varphi_t(z_1))\}\,dt$$

$$= -\int_{-(T+t_1)}^{0} \{f(\varphi_t(\varphi_{T+t_1}(w_1))) - f(\varphi_t(\varphi_{T+t_1}(z_1)))\}\,dt$$

$$= -\int_{-(T+t_1)}^{0} \{f(\varphi_t(w_1)) - f(\varphi_t(z_2))\}\,dt$$

$$(\varphi_{T+t_1}(w_1) = w_1,\ \varphi_{T+t_1}(z_1) = z_2 \text{ より})$$

$$= -\int_{-(T+t_1)}^{0} (\varphi_{t*}(\alpha_{z_2}^-(w_1)), f)\,dt + o(\varepsilon) \quad (z_2,\ w_1 \in \mathcal{F}_{z_1}^- \text{ より})$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} (\varphi_{t*}(\alpha_{z_2}^-(w_1)), f)\,dt + o(\varepsilon) \qquad (T \text{ 十分大，かつ } |t_1| = o(\varepsilon))$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (\varphi_{t*}(\alpha_x^-(y), f)\,dt + o(\varepsilon) \qquad ((7.60) \text{ より})$$

$$= \omega_f(\alpha_x^-(y)) + o(\varepsilon) \qquad (\omega_f \text{ の定義より})$$

となる．

以上より，

$$u(y) - u(x) = \omega_f(\alpha_x^+(y) + \alpha_x^-(y)) + o(\varepsilon) \tag{7.63}$$

を得る．ここで $y \in S_x$ なので，$\alpha_x(y) \doteqdot \alpha_x^+(y) + \alpha_x^-(y)$．よって，

$$u(y) - u(x) = \omega_f(\alpha_x(y)) + o(\varepsilon)$$

を得る．命題 7.13 を得た．□

7.5 調和多項式の空間と直交群の実表現論

本節では定理 7.10 の証明のために，コンパクト・リーマン多様体 (M,g) の任意の固定点 $x\in M$ における解析，とりわけ，M 上の余接球束 S^*M 上の C^∞ 関数全体の空間内の p 次調和多項式の空間 $H^p(M)$ の詳しい解析を行う．

コンパクト・リーマン多様体 (M,g) の任意の固定点 $x\in M$ に対し，以下では，$V:=T_xM$, $\langle\,,\,\rangle$ を V 上の g_x による内積，V^* を V の双対空間とし，V におけるテンソル代数の準備から始めよう．

$\bigotimes^p V$ を p 次反変テンソル空間，$S^pV\,(\subset\bigotimes^p V)$ を対称な p 次反変テンソル全体のなす部分空間とする．$\bigotimes^p V$ 上の内積 $\langle\,,\,\rangle$ を，

$$\langle v^1\otimes\cdots\otimes v^p, w^1\otimes\cdots\otimes w^p\rangle:=\prod_{i=1}^p\langle v^i,w^i\rangle \tag{7.64}$$

ここで v^i, $w^i\in V$ $(i=1,\ldots,p)$ と定義する．この内積から S^pV などの $\bigotimes^p V$ のすべての部分空間に内積が誘導され，同じ記号 $\langle\,,\,\rangle$ で書く．

定義 7.14　**対称化写像** $\mathcal{S}:\bigotimes^p V\to S^pV$ とは，

$$\mathcal{S}(v^{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{i_p}):=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}v^{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes v^{i_{\sigma(p)}} \tag{7.65}$$

のことである．ここで $\mathfrak{S}_p$ は p 個の文字 $\{1,\ldots,p\}$ の置換全体の集合を表す．(7.65) を $v^{i_1}\bullet\cdots\bullet v^{i_p}$ と書き，**対称積**という．

また，**伸張** $\alpha: S^pV\to S^{p+2}V$ とは

$$\alpha(F):=\mathcal{S}(F\otimes G),\qquad F\in S^pV \tag{7.66}$$

のことをいい，**縮小** $\beta: S^{p+2}V\to S^pV$ とは，

$$\beta(H):=H\otimes G^*\ \text{の縮約},\qquad H\in S^{p+2}V \tag{7.67}$$

のことをいう．すなわち，

$$\alpha(F)^{i_1\cdots i_{p+2}}=\frac{1}{(p+2)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+2}}F^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}\,g^{i_{\sigma(p+1)}i_{\sigma(p+2)}}, \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}\beta(H) &= \left(\sum H^{i_1\cdots i_{p+2}}\, v^{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{i_{p+2}}\right)\otimes\left(\sum g_{ij}\, w_i\otimes w_j\right) \text{ の縮約}\\ &= \sum H^{i_1\cdots i_p ij}\, g_{ij}\, v^{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{i_p}\\ &= \sum H^{i_1\cdots i_p i}{}_{i}\, v^{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{i_p}\in S^pV \end{aligned}\tag{7.69}$$

である.

以下. $\{v^i\}_{i=1}^n$ を V の任意の基底とし, 固定する. 任意の $F\in S^pV$ は

$$F=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} F^{i_1\cdots i_p}\, v^{i_1}\bullet\cdots\bullet v^{i_p}=\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} F^{i_1\cdots i_p}\, v^{i_1}\otimes\cdots\otimes v^{i_p}$$

と表記されるので, 内積 $\langle\,,\,\rangle$ は

$$\langle F,H\rangle=\sum F^{i_1\cdots i_p}H^{j_1\cdots j_p}g_{i_1j_1}\cdots g_{i_pj_p}=\sum F^{i_1\cdots i_p}\,H_{i_1\cdots i_p}$$

と与えられる. ここで $g_{ij}:=\langle v^i,v^j\rangle$, $(g^{ij}):=(g_{k\ell})$ の逆行列,

$$F^{i_1}{}_{i_2\cdots i_p}=\sum_{j=1}^{n} g^{i_1j}\,F_{ji_2\cdots i_p},\quad F_{i_1}{}^{i_2\cdots i_p}=\sum_{j=1}^{n} g_{i_1j}F^{ji_2\cdots i_p},$$

などと慣用表記法を用いる. また, 上記のように和の範囲が $\{1,2,\ldots,n\}$ の場合を扱うときは, しばしば和の範囲を省略して書くことがある.

S^2V と S^2V^* には次のように定義される特別の要素が存在する:

$$G:=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\,v^i\otimes v^j\in S^2V,\tag{7.70}$$

$$G^*:=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,w_i\otimes w_j\in S^2V^*.\tag{7.71}$$

ここで $w_i\in V^*$ は $w_i(v^j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ によって一意的に決まる元である. G, G^* は V の基底 $\{v^i\}_{i=1}^n$ の選び方に依らず, V の内積 $\langle\,,\,\rangle$ にのみ依存する.

補題 7.15 伸張と縮小は互いに共役である，すなわち，次式が成り立つ：

$$\langle \alpha(F), H\rangle = \langle F, \beta(H)\rangle \qquad (F \in S^pV,\ H \in S^{p+2}V). \tag{7.72}$$

証明 実際，

$$\begin{aligned}\langle \alpha(F), H\rangle &= \sum \alpha(F)^{i_1\cdots i_{p+2}}\, H_{i_1\cdots i_{p+2}} \\ &= \sum \frac{1}{(p+2)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+2}} F^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}\, g^{i_{\sigma(p+1)} i_{\sigma(p+2)}}\, H_{i_1\cdots i_{p+2}} \\ &= \sum \frac{1}{(p+2)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+2}} F^{i_1\cdots i_p}\, g^{i_{p+1} i_{p+2}}\, H_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p+2)}} \\ &= \sum F^{i_1\cdots i_p}\, g^{i_{p+1} i_{p+2}}\, H_{i_1\cdots i_{p+2}} \\ &= \sum F^{i_1\cdots i_p}\, H_{i_1\cdots i_p i}{}^{i} = \sum F_{j_1\cdots j_p}\, H^{j_1\cdots j_p j}{}_{j} \\ &= \langle F, \beta(H)\rangle \end{aligned} \tag{7.73}$$

となるからである.□

定義 7.16 縮小 β の核空間を**トレースが 0 の p 次対称テンソルの空間**という：

$$\begin{aligned}\Theta^pV &:= \left\{ H \in S^pV \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} H^{i_1\cdots i_{p-2} i}{}_{i} = 0 \quad (\forall\, i_1, \ldots, i_{p-2}) \right\} \\ &= \{H \in S^pV \mid \beta(H) = 0\} \qquad ((7.71)\ 参照).\end{aligned}$$

命題 7.17（調和多項式の定義と特徴付け） (1) 任意の p 次対称テンソル $F = \sum F^{i_1\cdots j_p}\, v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p} \in S^pV$ に対して，V^* 上の**多項式関数** f を

$$f(w) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \sum F^{i_1\cdots i_p}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p} \qquad (w \in V^*) \tag{7.74}$$

と定義する．ここで右辺の V^* 上の多項式 $\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_p}$ は

$$(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p})(w) := \langle \xi_{i_1}, w\rangle \cdots \langle \xi_{i_p}, w\rangle \qquad (w \in V^*)$$

で与えられる．特に $\xi_i \in V^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ は $\langle \xi_i, w \rangle := w(v^i)$ $(w \in V^*)$ と定義されている．このとき $\langle , \rangle$ は V^* 上の内積を与え，次式を満たす．

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, w \rangle\, w_i \qquad (w \in V^*). \tag{7.75}$$

また上記の対応 $S^pV \ni F \mapsto f$ は S^pV と V^* 上の **p 次斉次多項式全体の空間**との間の 1 対 1 対応を与える．

(2)　(1) の対応 $S^pV \ni F \mapsto f$ はトレース 0 の p 次対称テンソルの空間 Θ^pV と V^* 上の p 次調和多項式全体の空間 H^p との間の 1 対 1 対応を与える．

ここで V^* 上の **p 次調和多項式の空間**とは，

$$H^p := \{f \mid f \text{ は } p \text{ 次の多項式で}, \Delta_0 f = 0\}$$

のことである．ここに作用素 Δ_0 は $\Delta_0 := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ であり，$g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ と定義される．

証明　命題 7.17 の証明を与える．ξ_i の定義より $\xi_i(v^j) = \delta_{ij}$．また $\langle \xi_i, w_j \rangle = w_j(v^i) = \delta_{ij}$ より，$\{\xi_i\}$ と $\{w_i\}$ はともに V^* の基底となる．任意の $w \in V^*$ を $w = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ と表示すると，$\langle \xi_j, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \xi_j, w_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$．これから (7.75) を得る．

他方，$F \in S^pV$ に対応する p 次斉次多項式 を f とするとき，$\Delta_0 f = 0$ であることと $\beta(F) = 0$ とが同等であることを確認しておこう．実際，

$$\begin{aligned}
\Delta_0 f &:= \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left(\sum F^{i_1 \cdots i_p}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p} \right) \\
&= \binom{p}{2} \sum g_{ij}\, F^{i_1 \cdots i_{p-2} ij}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{p-2}} \\
&= \binom{p}{2} \sum F^{i_1 \cdots i_{p-2} i}{}_{i}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{p-2}} \\
&= \binom{p}{2} \sum \beta(F)^{i_1 \cdots i_{p-2}}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{p-2}}.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

(7.76) より，$\Delta_0 f = 0$ と $\beta(F) = 0$ の同等性がでる．その他は各自試みよ．□

次に，V^* 内の**単位球面**を $S^* := \{w \in V^* | \langle w, w \rangle = 1\}$ と定義する．ここで V^* 上の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ は V 上の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ から誘導されたもので（命題 7.17 (1)），

$$\langle w, w' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \eta^i = \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i\, \eta_j\, g^{ij} \qquad \left(w = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, w_i,\ w' = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, w_i \in V^* \right) \tag{7.77}$$

と与えられる．

特殊直交群 $SO(V)$ とは，V の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ を不変にする V 上の1次変換全体のなす群の単位元を含む連結成分のことである．$SO(V)$ の V^* への作用を

$$({}^t A w)(v) := w(Av) \qquad (A \in SO(V),\, w \in V^*,\, v \in V)$$

とし，$d\sigma$ をこの S^* への $SO(V)$-作用に関して不変な測度として，

$$L^2(S^*) := \left\{ f \,\middle|\, S^* \text{ 上の実数値関数で，} \int_{S^*} f^2\, d\sigma < \infty \right\}$$

と定義する．$d\sigma$ の定数倍の補正は次の補題 7.18 の証明中で与えられる．

V^* 上の p 次調和多項式全体の空間 H^p の各元 f は斉次多項式なので，その S^* への制限 $f|_{S^*}$ によって一意的に決まる．それらの空間 $\{f|_{S^*} | f \in H^p\}$ を同じ記号 H^p で表す: $H^p \subset L^2(S^*)$．さらに，命題 7.17 (1), (2) の同型対応を経由して，

$$L^2(S^*) \supset H^p \ni f|_{S^*} \mapsto f(\in H^p \subset C^\infty(V^*)) \mapsto F \in \Theta^p V \tag{7.78}$$

によって得られる $H^p(\subset L^2(S^*))$ から $\Theta^p V$ の上への同型対応を γ と書く：

$$\gamma :\, H^p \to \Theta^p V.$$

このとき，$L^2(S^*)$ の L^2 内積から誘導される H^p 上の内積

$$(f, f') := \int_{S^*} f f'\, d\sigma$$

と $\Theta^p V$ 上の内積

$$\langle F, F' \rangle \quad (F = \gamma(f), F' = \gamma(f') \in \Theta^p V)$$

との間には次のような関係式がある.

補題 7.18 $\|f\|^2 = (f, f)$ かつ $\|\gamma(f)\|^2 = \langle \gamma(f), \gamma(f) \rangle$ とすると,

$$\|\gamma(f)\|^2 = \gamma(p)\,\|f\|^2 \qquad (\forall\ f \in H^p \subset L^2(S^*))$$

が成り立つ. ただし $\gamma(p) := 2^p \frac{\Gamma\left(p+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}$ である.

この証明は7.8節で行う.

さて $SO(V)$ は次のようにして, 先程の2つの空間 $\Theta^p V$ と H^p に作用している:

$SO(V)$ の $\bigotimes^p V$ への作用は $A \in SO(V)$, $v^i \in V$ とするとき,

$$A(v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}) := A\,v^{i_1} \otimes \cdots \otimes A\,v^{i_p}$$

によって作用する. この作用により $S^p V$ と $\Theta^p V$ はそれぞれ不変部分空間となっている.

一方, $SO(V)$ の $L^2(S^*)$ への作用は

$$(Af)(w) := f({}^t\!Aw) \qquad (f \in L^2(S^*),\ w \in S^* \subset V^*, A \in SO(V))$$

ここで $({}^t\!Aw)(v) = w(Av)$ $(w \in S^*,\ v \in V,\ A \in SO(V))$ であった.

このとき, $(AB)f = A(Bf)$ $(A,\ B \in SO(V),\ f \in L^2(S^*)$ である.

補題 7.19 (1) 次の等式が成り立つ:

$$\Delta_0(Af) = A(\Delta_0 f) \qquad (f \in C^\infty(S^*),\ A \in SO(V)). \tag{7.79}$$

したがって, H^p は $SO(V)$-不変な部分空間である.

(2) 同型対応 $\gamma\colon H^p \to \Theta^p V$ は $SO(V)$-同変である, すなわち,

$$\gamma(Af) = A\,\gamma(f) \qquad (A \in SO(V),\ f \in H^p). \tag{7.80}$$

証明 (1) V の基底 $\{v^j\}_{j=1}^n$ と V^* の基底 $\{w_i\}_{i=1}^n$ は $w_i(v^j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ に取り，$A \in SO(V)$ を $v'^j := Av^j = \sum_{i=1}^n A_{ij} v^i$ と表示すると，

$$({}^tAw_i)(v^j) = w_i(Av^j) = \sum_{k=1}^n A_{kj}\, w_i(v^k) = \sum_{k=1}^n A_{kj}\delta_{ik} = A_{ij}$$

より，${}^tAw_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} w_j$ である．$w' := {}^tAw = \sum_{j=1}^n \xi'_j\, w_j$, $w = \sum_{i=1}^n \xi_i\, w_i$ とおくと，$\xi'_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\xi_i$, 特に，$\frac{\partial \xi'_j}{\partial \xi_i} = A_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ である．

$$\therefore \quad \frac{\partial Af(w)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial (f({}^tAw))}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi'_k}\,\frac{\partial \xi'_k}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^n A_{ik}\,\frac{\partial f}{\partial \xi'_k},$$

$$\frac{\partial^2 Af(w)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \sum_{k,\ell=1}^n A_{ik}\, A_{j\ell}\, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_k \partial \xi'_\ell}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\Delta_0(Af) &= \sum_{i,j=1}^n \langle v^i, v^j \rangle\, \frac{\partial^2 Af(w)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \sum_{i,j=1}^n \langle v^i, v^j \rangle \sum_{k,\ell=1}^n A_{ik} A_{j\ell}\, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_k \partial \xi'_\ell} \\
&= \sum_{k,\ell=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^n A_{ik} v^i, \sum_{j=1}^n A_{j\ell} v^j \right\rangle \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_k \partial \xi'_\ell} \\
&= \sum_{k,\ell=1}^n \langle v'^k, v'^\ell \rangle\, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_k \partial \xi'_\ell} \\
&= A(\Delta_0 f).
\end{aligned} \tag{7.81}$$

(7.79) を得た．(2) については，$f = \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p} \in H^p$ とすると，$\xi'_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\xi_i$ より，

$$\begin{aligned}
(Af)(w) = f({}^tAw) &= \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, \xi'_{i_1} \cdots \xi'_{i_p} \\
&= \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, A_{j_1 i_1} \cdots A_{j_p i_p}\, \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_p}
\end{aligned} \tag{7.82}$$

となる．ゆえに，

$$\gamma(Af) = \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, A_{j_1 i_1} \cdots A_{j_p i_p}\, v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_p}$$

$$= \sum F^{i_1 \cdots i_p} Av^{i_1} \otimes \cdots \otimes Av^{i_p}$$

$$= A\gamma(f) \tag{7.83}$$

となり，(7.80) を得た.□

補題 7.20 $n = \dim V \geq 3$ のとき，特殊直交群 $SO(V)$ は $\Theta^p V$ の複素化および H^p の複素化に，それぞれ $\mathbb{C}$ 上の表現として既約に作用している.

証明は [50], p.258，定理 14.2 を参照せよ.

補題 7.21 (1) P^p を V^* 上の $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(w = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i \in V^*)$ の p 次斉次多項式全体のなす空間とする．このとき，$p \geq 2$ ならば，

$$P^p = H^p \oplus r^2 P^{p-2} \qquad (\text{直和分解}) \tag{7.84}$$

が成り立つ．ここで r^2 は $r^2(w) := \langle w, w \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \xi_i \xi_j$ で与えられる V^* 上の 2 次式である.

(2) $p \geq 2$ のとき，次の直和分解が成り立つ：

$$S^p V = \Theta^p V \oplus \alpha(S^{p-2} V). \tag{7.85}$$

証明 (1) については，上記の文献を参照せよ．(2) については，$F \in S^{p-2}V$ に対して，$\alpha(F) \in S^p V$ に対する V^* 上の関数は

$$\sum \alpha(F)^{i_1 \cdots i_p} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p} = \sum \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} F^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p-2)}} g^{i_{\sigma(p-1)} i_{\sigma(p)}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p}$$

$$= \sum F^{i_1 \cdots i_{p-2}} g^{i_{p-1} i_p} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p}$$

$$= r^2(w) f(\xi) \tag{7.86}$$

となる．ここで $f(\xi) := \sum F^{i_1 \cdots i_{p-2}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{p-2}}$ である．ゆえに補題 7.19 (2) より，(7.85) は (7.84) の言い換えである.□

補題 7.22 伸張 $\alpha: S^p V \to S^{p+2} V$ は単射であり，縮小 $\beta: S^{p+2} V \to S^p V$ は全射である.

証明　$\alpha : S^pV \to S^{p+2}V$ が単射であること．$\alpha(F) = 0$ $(F \in S^pV)$ とすると，(7.85) より，$r^2(w)\, f(\xi) = 0$．ゆえに，$f(\xi) = \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_p} = 0$．これから $F = 0$ となる．次に $\beta : S^{p+2}V \to S^pV$ が全射であることは，$\langle F, \beta(H)\rangle = 0$ $(\forall\, H \in S^{p+2}V)$ とすると，$F = 0$ を示せば良い．補題 7.15 より，$\langle \alpha(F), H\rangle = 0$ $(\forall\, H \in S^{p+2}V)$ を得る．ゆえに，$\alpha(F) = 0$ となる．$\alpha : S^pV \to S^{p+2}V$ が単射なので，$F = 0$ を得た.□

ここで，

$$\widetilde{\Theta}^{p-2} := \alpha(\Theta^{p-2}), \quad \widetilde{\Theta}^{p-4} := \alpha(\alpha(\Theta^{p-4})), \ldots \tag{7.87}$$

とおく．これらの空間は S^pV の $SO(V)$-不変部分空間であり，それらの複素化は $\mathbb{C}$ 上 $SO(V)$-既約となり，S^pV は次のように分解する：

$$S^pV = \begin{cases} \Theta^pV \oplus \widetilde{\Theta}^{p-2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Theta}^2 & (p\ \text{が偶数のとき}) \\ \Theta^pV \oplus \widetilde{\Theta}^{p-2} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\Theta}^3 \oplus \widetilde{\Theta}^1 & (p\ \text{が奇数のとき}) \end{cases} \tag{7.88}$$

となる．

命題 7.23　$n = \dim V \geq 3$ とする．このとき，$\bigotimes^{p+1} V$ の $SO(V)$-不変部分空間 $\Theta^pV \otimes V$ は次のような $SO(V)$-不変な分解をもつ：

$$\Theta^pV \otimes V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0 \qquad (\text{直交直和分解}) \tag{7.89}$$

ここで

$$S^{p+1}V \supset \mathcal{S}(\Theta^pV \otimes V) = \Theta^{p+1}V \oplus \widetilde{\Theta}^{p-1} \tag{7.90}$$

であり，W_+ は $\Theta^{p+1}V$ に同型な $SO(V)$-同型な部分空間，W_- は $\widetilde{\Theta}^{p-1}$ に $SO(V)$-同型な部分空間，かつ $W_0 := \{F \in \Theta^pV \otimes V \,|\, \mathcal{S}(F) = 0\}$ となる．

注意 7.24　実は W_+ は $\Theta^{p+1}V$ と一致する．

証明　(第１段) $C : \Theta^pV \otimes V \to \Theta^{p-1}V$ を**縮約**，すなわち，$F = \sum F^{i_1 \cdots i_p}\, v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_p}$ かつ $v = \sum_{i=1}^n a^i\, v^i$ に対して，

$$C(F \otimes v) := \sum F^{i_1 \cdots i_{p-1} i}\, a_i\, v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_{p-1}} \in \Theta^{p-1}V$$

とする．このとき，C は $SO(V)$-同変写像であるが，$\Theta^{p-1}V$ の上への写像である．

実際，$\{0\} \neq C(\Theta^p V \otimes V) \subset \Theta^{p-1}V$ かつ，$\Theta^{p-1}V$ の複素化は $SO(V)$-既約であったので，$C(\Theta^p V \otimes V)$ の複素化は $\Theta^{p-1}V$ の複素化と一致する．ゆえに，$C(\Theta^p \otimes V) = \Theta^{p-1}V$ を得た．

（第2段）さらに，

$$\beta \circ \mathcal{S} = \frac{2}{p+1} C \tag{7.91}$$

が成り立つ．実際，$F \in \Theta^p V,\, v \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \mathcal{S}(F \otimes v))^{i_1 \cdots i_{p-1}} &= \sum_{i_p, i_{p+1}} \mathcal{S}(F \otimes v)^{i_1 \cdots i_{p+1}} g_{i_p i_{p+1}} \\
&= \sum_{i_p, i_{p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}} F^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} a^{i_{\sigma(p+1)}} g_{i_p i_{p+1}} \\
&= \sum_{i_p, i_{p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \Bigg\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1},\, \sigma(p+1)=p} F^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} a^{i_p} g_{i_p i_{p+1}} \\
&\qquad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1},\, \sigma(p+1)=p+1} F^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} a^{i_{p+1}} g_{i_p i_{p+1}} \Bigg\} \\
&\qquad\qquad (\text{ここで } F \in \Theta^p V \text{ であることを使った}) \\
&= \sum_{i_p} \frac{2}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} F^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} a_{i_p} = \frac{2\, p!}{(p+1)!} \sum_{i=1}^{n} F^{i_1 \cdots i_p} a_i \\
&= \frac{2}{p+1} (C(F \otimes v))^{i_1 \cdots i_p}
\end{aligned} \tag{7.92}$$

となるからである．

（第3段）$\mathcal{S}(\Theta^p V \otimes V)\,(\subset S^{p+1}V)$ について，

$$\mathcal{S}(\Theta^p V \otimes V) = (\Theta^{p+1} V) \oplus \widetilde{\Theta}^{p-1} \tag{7.93}$$

が成り立つ．実際，

$$\mathcal{S}(\Theta^p V \otimes V) = W' \oplus \mathrm{Ker}(\beta|_{\mathcal{S}(\Theta^p V \otimes V)})$$

となる．ここで W' は $\beta\circ\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)$ と $SO(V)$-同型な部分空間である．(7.91) と第1段より，

$$\beta\circ\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)=C(\Theta^pV\otimes V)=\Theta^{p-1}V$$

である．一方，定義 7.16 より，次の (7.94) の第1式を得られ，さらに (7.94) の第2式が成り立つ．

$$\mathrm{Ker}(\beta|_{\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)})=\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)\cap\Theta^{p+1}V=\Theta^{p+1}V. \tag{7.94}$$

$\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)\cap\Theta^{p+1}V$ は $SO(V)$-不変な $\Theta^{p+1}(V)$ の部分空間で，$\Theta^{p+1}V$ の複素化は既約なので，$\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)\cap\Theta^{p+1}V\neq\{0\}$ を示せば良い．このために，$\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)$ に対応する V^* 上の斉次多項式を調べる．$F\in\Theta^pV, v\in V$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum(\mathcal{S}(F\otimes v))^{i_1\cdots i_{p+1}}&=\sum\frac{1}{(p+1)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}}F^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}\,a^{i_{\sigma(p+1)}}\,\xi_{i_1}\,\cdots\,\xi_{i_{p+1}}\\&=\left(\sum F^{i_1\cdots i_p}\,\xi_{i_1}\,\cdots\,\xi_{i_{i+1}}\right)\left(\sum a^{i_{p+1}}\,\xi_{i_{p+1}}\right)\end{aligned}\tag{7.95}$$

となるので，$\{f_1\,f_2|\,f_1\in H^p,\ f_2\in H^1\}$ の複素化の中に $p+1$ 次の調和多項式で，恒等的に零でないものが存在することを示せば良い．これは次のようにしてわかる．V^* の内積 $\langle\,,\rangle$ に関する正規直交基底 $\{w_i\}_{i=1}^n$ を取り，これに関する座標を $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ とする．$\Delta_0=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial{\xi_i}^2}$ なので，任意の非負整数 $\ell\geq 0$ に対して，$\Delta_0\,(\xi_1+\sqrt{-1}\xi_2)^\ell=0$ である．ゆえに，$(\xi_1+\sqrt{-1}\xi_2)^{p+1}=(\xi_1+\sqrt{-1}\xi_2)^p\,(\xi_1+\sqrt{-1}\xi_2)$ が求めるものであり，結局，(7.93) を得た．

（第4段）以上より，

$$\Theta^pV\otimes V=W''\oplus\mathrm{Ker}(\mathcal{S})$$

を得る．ここで W'' は $\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)$ と $SO(V)$-同型な部分空間である．このとき，

$$\langle\mathcal{S}(F),H\rangle=\langle F,\mathcal{S}(H)\rangle=0\quad(F\in W'',\ H\in\mathrm{Ker}(\mathcal{S}))$$

であり，$\mathcal{S}(\Theta^pV\otimes V)$ の直交分解 (7.93) より求める結論を得る．□

補題 7.25 S^pV の分解 (7.88) は $SO(V)$-既約分解であり，内積 $\langle\,,\rangle$ に関して直交分解である．

証明 分解 (7.88) の各成分は $SO(V)$-空間として同値ではなく，その複素化はそれぞれ $SO(V)$-既約である．ゆえに次のことを示せば良い：

$SO(V)$-空間 W が

$$W = W_1 + \cdots + W_r = W_1' + \cdots + W_r'$$

と分解し，W_i と W_i' は互いに $SO(V)$-同値で，その複素化は既約であり，$i \neq j$ のとき，W_i と W_j は $SO(V)$-同値でないとする．このとき，$W_i = W_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ である．

これは実際，次のように示される．$\pi_i : W \to W_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ を分解 $W = W_1 + \cdots + W_r$ に応じた射影とする．このとき，$\pi_i(W_j') = \{0\}$ $(\forall j \neq i)$ である．なぜなら，$\pi_i(W_j') \subset W_i$ かつ ${W_i}^{\mathbb{C}}$ が既約なので，$\pi_i(W_j')^{\mathbb{C}} = {W_i}^{\mathbb{C}}$ または $\{0\}$ である．$\pi_i(W_j')^{\mathbb{C}} = {W_i}^{\mathbb{C}}$ とすると，$SO(V)$-空間として，$W_j'^{\mathbb{C}} \equiv {W_i}^{\mathbb{C}} + \mathrm{Ker}(\pi_i)$ である．ところが $W_j'^{\mathbb{C}}$ は既約だから，$W_j'^{\mathbb{C}} \equiv {W_i}^{\mathbb{C}}$ となる．しかしこれは $i \neq j$ なので起こり得ない．それゆえに，$j \neq i$ のとき，$\pi_i(W_j')^{\mathbb{C}} = \{0\}$, すなわち $\pi_i(W_j') = \{0\}$ となる．ゆえに，$W_j' \subset W_j$ を得た．それらの複素化はどちらも既約なので，$W_j' = W_j$ となる．以上により，補題 7.25 を得た.□

さらに，写像 α, β および $\mathcal{S}$ について，次の 3 つの補題が成り立つ．

補題 7.26 伸張 $\alpha : \Theta^pV \to \widetilde{\Theta}^p \subset S^{p+2}V$ に対して，

$$\|\alpha(F)\|^2 = \alpha(p)\,\|F\|^2 \qquad (F \in \Theta^pV) \tag{7.96}$$

が成り立つ．ここで $\alpha(p) := \frac{4}{p+2}\left(1 + \frac{n-2}{2(p+1)}\right)$ である．

この補題 7.26 の証明は 7.8 節で行う．

補題 7.27 縮小 $\beta : S^{p+2}V \subset \widetilde{\Theta}^p \to \Theta^pV$ について，

$$\|\beta(F)\|^2 = \alpha(p)\,\|F\|^2 \qquad (F \in \widetilde{\Theta}^p) \tag{7.97}$$

が成り立つ.

証明 （第1段）補題 7.21 および (7.88) により,

$$S^pV = \Theta^pV + \alpha(S^{p-2}V) = \Theta^pV + \alpha(\Theta^{p-2}V) + \alpha\circ\alpha(S^{p-4}V)$$

である．したがって，$F \in S^pV$ が $\mathrm{Ker}(\beta\circ\beta)$ に属すれば，補題 7.15 により，

$$0 = \langle(\beta\circ\beta)(F), S^{p-4}V\rangle = \langle F, \alpha\circ\alpha(S^{p-4}V)\rangle$$

となる．補題 7.25 により，$\alpha\circ\alpha(S^{p-4}V)$ の直交補空間は $\Theta^pV + \alpha(\Theta^{p-2}V)$ であるので,

$$\mathrm{Ker}(\beta\circ\beta) = \Theta^pV + \alpha(\Theta^{p-2}V) \tag{7.98}$$

となる．また次式が成り立つ：

$$\beta\circ\alpha(\Theta^pV) \subset \Theta^pV. \tag{7.99}$$

（第2段）$\beta\circ\alpha : \Theta^pV \to \Theta^pV$ は $SO(V)$-同変写像であり，Θ^pV の複素化は既約であったので，シュアの補題により，$\Theta^pV^{\mathbb{C}}$ 上で,

$$\beta\circ\alpha = c\,\mathrm{Id} \qquad (c\in\mathbb{C},\ \mathrm{Id}\ \text{は}\ \Theta^pV^{\mathbb{C}}\ \text{の恒等写像}).$$

ここで $\beta\circ\alpha(\Theta^pV) \subset \Theta^pV$ なので，c は実数.

（第3段）同様に，$\alpha\circ\beta : \alpha(\Theta^pV) \to \alpha(\Theta^pV)$ についても，ある実数 $d\in\mathbb{R}$ が存在して，次式が成り立つ：

$$\alpha\circ\beta = d\,\mathrm{Id} \qquad (\alpha(\Theta^pV)\ \text{上}).$$

（第4段）このとき $c = d$ である．なぜなら，$F \in \Theta^pV$ に対して，$c\,F = \beta\circ\alpha(F)$ の両辺に α を施して，$c\,\alpha(F) = \alpha\circ\beta\circ\alpha(F) = d\,\alpha(F)$ であるので，補題 7.26 より，$F \neq 0$ ならば，$\alpha(F) \neq 0$ となるから，$c = d$ を得る.

さて補題 7.26 より，$F \in \Theta^pV$ に対して,

$$\alpha(p)\,\|F\|^2 = \|\alpha(F)\|^2 = \langle\alpha(F),\alpha(F)\rangle = \langle\beta\circ\alpha(F), F\rangle = c\,\|F\|^2.$$

よって，$\alpha(p)=c$. ゆえに，$H\in\widetilde{\Theta}^p=\alpha(\Theta^p V)$ に対して，

$$\|\beta(H)\|^2=\langle\beta(H),\beta(H)\rangle=\langle\alpha\circ\beta(H),H\rangle=c\,\|H\|^2=\alpha(p)\,\|H\|^2$$

となる．これは求める (7.97) である．よって補題 7.27 を得た.□

補題 7.28　対称化写像 $\mathcal{S}:(\Theta^p V\otimes V\supset)\,W_-\to\widetilde{\Theta}^{p-1}(\subset S^{p+1}V)$ は

$$\|\mathcal{S}(F)\|^2=\frac{1}{p+1}\,\|F\|^2\qquad(F\in W_-)\tag{7.100}$$

を満たす.

この補題 7.28 の証明も 7.8 節で行う.

7.6　対称テンソル場の空間上の楕円型作用素

本節では証明の鍵となるトレース零の対称テンソルの空間上に作用する 1 階の楕円型偏微分作用素の D_+ の**矢野・ボホナー・ワイツェンベック公式**について述べる.

以下では，(M,g) は $n(\geq 3)$-次元コンパクト・リーマン多様体とし，前節の記号などはそのまま保つものとする.

$S^p(TM):=\bigcup_{x\in M}S^p(T_xM)$ を接束 TM 上の p 次対称テンソル束，その部分束 $\Theta^p:=\sum_{x\in M}\Theta^p(T_xM)$ をトレース零の p 次対称テンソル束とし，それらの C^∞ 切断全体のなす空間をそれぞれ，$S^p(M):=\Gamma(S^p(TM))$, $\Gamma(\Theta^p)$ とする．$\Gamma(\Theta^p)$ は $S^p(M)$ の部分空間で，その元を**トレース 0 の対称テンソル場**と呼ぶ.

S^*M を (M,g) の余接球束，$H^p(M)$ を S^*M **上の調和多項式の空間**とする．すなわち，$H^p(M)$ は $L^2(S^*M)$ の部分空間で次のように定義されている：

$$H^p(M):=\{f\in L^2(S^*M)\mid f|_{S^*_xM}\in H^p(S^*_xM)\ (\forall\ x\in M)\}.\tag{7.101}$$

ここで $H^p(S^*_xM)$ は T^*_xM 上の p 次調和多項式の S^*_xM への制限全体のなす線形空間を表す.

さてトレース零の対称テンソル場の空間 $\Gamma(\Theta^p)$ は $H^p(M)$ と次のように同一視される．次のような同型対応 γ が定義される．

$$\gamma:\ H^p(M)\cap C^\infty(S^*M)\xrightarrow{\cong}\Gamma(\Theta^p) \tag{7.102}$$

ここで $f\in H^p(M)\cap C^\infty(S^*M)$ に対して，$\gamma(f)\in\Gamma(\Theta^p)$ を，

$$\gamma(f):=\gamma(f|_{S_x^*M})\in\Theta^p(T_xM), \qquad (x\in M) \tag{7.103}$$

と定義する．$f|_{S_x^*M}\in H^p(S_x^*M)$ であり，(7.103) の右辺の γ は (7.78) におけるものである．$f\in C^\infty(S^*M)$ より $\gamma(f)\in\Gamma(\Theta^p)$ となる．

さらに，$\langle F,H\rangle$ が各点 $x\in M$ における $S^p(T_xM)$ の内積であるとき，$\Gamma(\Theta^p)$ 上には内積 (,) が

$$(F,H):=\int_M\langle F,H\rangle\,v_g \tag{7.104}$$

によって与えられていた．一方，$C^\infty(S^*M)$ 上の L^2-内積 (,) が $f,f'\in C^\infty(S^*M)$ に対して，

$$\begin{aligned}(f,f')&:=\int_{S^*M}f\,f'\,d\mu_g\\&=\int_M\left[\int_{\{(x,\xi)\in S_x^*M\}}f(x,\xi)\,f'(x,\xi)\,d\sigma_x(\xi)\right]v_g\end{aligned} \tag{7.105}$$

によって与えられ，これから $H^p(M)$ 上の内積 (,) が誘導されていた．上記2つの内積の関係は補題 7.18 により，$\gamma(p):=2^p\,\frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})}{\Gamma(p+1)}$ とおくと

$$(\gamma(f),\gamma(f'))=\gamma(p)\,(f,f'), \qquad (f,f'\in H^p(M)) \tag{7.106}$$

と与えられている．

さて次に，余接球束 S^*M 上の測地流ベクトル場 Ξ の $H^p(M)\cap C^\infty(S^*M)$ 内の関数 f への作用 Ξf 及び $F:=\gamma(f)\in\Gamma(\Theta^p)$ への作用を調べる．7.5 節の結果を使うために，リーマン多様体 (M,g) 上の局所座標系 $(U,(x^1,\ldots,x^n))$ を取り，対称テンソル場 $F=\gamma(f)\in\Gamma(\Theta^p)$ を

$$F=\sum F^{i_1\cdots i_p}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}$$

と U 上で局所表示する．このとき F の**共変微分** $\nabla F \in \Gamma(\Theta^p \otimes TM)$ を

$$\nabla F = \sum F^{i_1 \cdots i_p, i_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_{p+1}}} \tag{7.107}$$

と表す．ここで $\nabla F \in \Gamma(\Theta^p \otimes TM)$ の成分 $F^{i_1 \cdots i_p, i_{p+1}}$ は

$$F^{i_1 \cdots i_p, i_{p+1}} = \sum_{i=1}^{n} g^{i_{p+1} i} \left\{ \frac{\partial F^{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i} + \sum_{u=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma^{i_u}_{i\ell} F^{i_1 \cdots i_{u-1} \ell i_{u+1} \cdots i_p} \right\} \tag{7.108}$$

であり，Γ^k_{ij} はクリストッフェルの記号を表す．実際，F の共変微分である $(p,1)$ テンソル場 $\hat{\nabla} F = \sum F^{i_1 \cdots i_p}{}_{,k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^k$ について，

$$F^{i_1 \cdots i_p, i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{n} g^{i_{p+1} k} F^{i_1 \cdots i_p}{}_{,k} \tag{7.109}$$

であり，$\hat{\nabla} F$ は

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla} F &= \sum \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \nabla F^{i_1 \cdots i_p} \\
&\quad + \sum F^{i_1 \cdots i_p} \sum_{u=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \nabla \frac{\partial}{\partial x^{i_u}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \\
&= \sum \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F^{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^k \\
&\quad + \sum \sum_{u=1}^{p} \sum_{k,\ell=1}^{n} F^{i_1 \cdots \ell \cdots i_p} \Gamma^{i_u}_{k\ell} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^k
\end{aligned}$$

となるので，$F^{i_1 \cdots i_p}{}_{,k} = \frac{\partial F^{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^k} + \sum_{u=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} F^{i_1 \cdots \ell \cdots i_p} \Gamma^{i_u}_{k\ell}$ である．これを (7.109) を代入して，(7.108) を得る．

命題 7.29　$f \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$ に対して，$h \in C^\infty(T^*M)$ で次のようなものが存在し，Ξf は次のように与えられる．

(1) h の $T^*_x M$ $(x \in M)$ への制限 $h|_{T^*_x M}$ は $p+1$ 次斉次多項式であり，

(2) $-\Xi f = h|_{S^*M}$ が成り立つ．ここで右辺は h の S^*M への制限である．

(3) h に対し，$H := \gamma(h) \in S^{p+1}(M)$ は ∇F の対称化である．すなわち，

$$H^{i_1\cdots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1}(F^{i_1\cdots i_p,i_{p+1}} + F^{i_2\cdots i_p i_{p+1},i_1} + \cdots + F^{i_{p+1}i_1\cdots i_{p-1},i_p}). \tag{7.110}$$

証明 $\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\,\xi_i\xi_j \in C^\infty(T^*M)$ に対するハミルトンベクトル場が Ξ であった：

$$\Xi = -\sum_{i,j=1}^n \left\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{r^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{r^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right\}.$$

ここで直接計算により，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\dfrac{r^2}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^n g^{ki}\,\xi_k \\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{r^2}{2}\right) = -\displaystyle\sum_{k,\ell,s=1}^n g^{ks}\,\Gamma_{si}^\ell\,\xi_k\xi_\ell \end{cases} \tag{7.111}$$

である．そこで，$f = \sum F^{i_1\cdots i_p}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_p} \in H^p(M)\cap C^\infty(S^*M)$ に対し，

$$\begin{aligned} -\Xi f &= \sum\sum_{i,k=1}^n g^{ki}\,\xi_k\,\frac{\partial F^{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_p} \\ &\quad + \sum\sum_{i,k,\ell,s=1}^n g^{ks}\,\Gamma_{si}^\ell\,\xi_k\,\xi_\ell\,F^{i_1\cdots i_p}\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_p}) \\ &= \sum\sum_{i=1}^n g^{i_{p+1}i}\,\frac{\partial F^{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{p+1}} \\ &\quad + \sum\sum_{u=1}^p\sum_{i,\ell=1}^n g^{i_{p+1}i}\,\Gamma_{i\ell}^{i_u}\,F^{i_1\cdots i_{u-1}\ell i_{u+1}\cdots i_p}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{p+1}} \\ &= \sum F^{i_1\cdots i_p,i_{p+1}}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{p+1}} \end{aligned} \tag{7.112}$$

となる．したがって，∇F の対称化 H は

$$\sum F^{i_1\cdots i_p,i_{p+1}}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{p+1}} = \sum H^{i_1\cdots i_{p+1}}\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{p+1}} \tag{7.113}$$

となる．(7.113) の右辺を h とすると，$H \in S^{p+1}(M) \cap C^\infty(T^*M)$ より，$h \in C^\infty(T^*M)$ であり，求める結論を得る.□

命題 7.30 $f \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$ とすると，$\Xi f \in H^{p-1}(M) + H^{p+1}(M)$ となる．ただし $p = 0$ のときは，$\Xi f \in H^1(M)$ である．

証明 命題 7.28 より，$f \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$ のとき，$-\Xi f = h|_{S^*M}$ であり，$\gamma(h) = H$ は $\nabla F = \sum F^{i_1\cdots i_p, i_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_{p+1}}}$ の対称化で，$F = \gamma(f) \in \Gamma(\Theta^p)$ であった．よって各点 $x \in M$ において，$V := T_xM$ とすると，7.5 節のように，$\nabla F \in \Theta^p V \otimes V$, ∇F の対称化 H は $H \in \mathcal{S}(\Theta^p V \otimes V) = \Theta^{p+1} V \oplus \widetilde{\Theta}^{p-1}$ ((7.93) より) となる．つまり，H は $\Theta^{p+1}V$ 成分と $\widetilde{\Theta}^{p-1} := \alpha(\Theta^{p-1})$ 成分の和となる．ここで $\alpha(\Theta^{p-1})$ は補題 7.21 とその証明により，γ を介して $r^2 H^{p-1}(T_x^*M)$ に対応していた．S_x^*M 上で $r^2 = 1$ であるので，$h|_{S_x^*M} \in H^{p+1}(S_x^*M) + H^{p-1}(S_x^*M)$ を得る.□

定義 7.31 $f \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$, $F = \gamma(f) \in \Gamma(\Theta^p)$, および H を ∇F の対称化とする．命題 7.23 の直和分解 (7.90) $\mathcal{S}(\Theta^p \otimes T^*M) = \Theta^{p+1} \oplus \widetilde{\Theta}^{p-1}$ に従い，

$$H = D_+F + D_-F, \tag{7.114}$$

ここで $D_+F \in \Gamma(\Theta^{p+1})$, $D_-F \in \Gamma(\widetilde{\Theta}^{p-1})$) とおく．このとき，$\nabla F$ も直和分解 (7.89) $\Theta^p \otimes T^*M = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$ に従い，

$$\nabla F = D_+F + D_-^{\#}F + D_0F \tag{7.115}$$

と分解する．ここで $\mathcal{S}(D_0F) = 0$, $D_-^{\#}F$ の対称化は $\mathcal{S}(D_-^{\#}F) = D_-F$ を満たす．

実際，(7.115) は次のように示される：直和分解

$$\Theta^p \otimes T^*M = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$$

に従い，$\nabla F = A_+ + A_- + A_0$ とおき，両辺の対称化を取る．$\mathcal{S}(A_0) = 0$ より，

$$D_+F + D_-F = H = \mathcal{S}(\nabla F) = \mathcal{S}(A_+) + \mathcal{S}(A_-) + \mathcal{S}(A_0) = \mathcal{S}(A_+) + \mathcal{S}(A_-).$$

よって，注意 7.24 を使い $D_-F = \mathcal{S}(A_-)$, $D_+F = \mathcal{S}(A_+) = A_+$ を得る．これから (7.115) を得た． □

さて ∇F の分解について次の定理が成り立つ．

定理 7.32 **(矢野・ボホナー・ワイツェンベック公式)** $n = \dim M \geq 3$, ρ_{ij} は (M,g) のリッチテンソル場，$R_{ijk\ell} = \sum_{s=1}^n g_{is}\, R^s{}_{jk\ell}$ は曲率テンソル場をそれぞれ表すとき，$\Omega(F)$ を次のように与える．

$$\Omega(F) := -\int_M \Big\{ \sum \rho_{ij}\, F^{ii_2\cdots i_p}\, F^j{}_{i_2\cdots i_p} + (p-1) \sum R_{ijk\ell}\, F^{iki_3\cdots i_p}\, F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p} \Big\}\, v_g. \tag{7.116}$$

$\kappa(p) := (p+1)\left(1 + \frac{n-2}{2p}\right)$ とおくと $F \in \Gamma(\Theta^p)$ に対して，M 上の L^2-内積に関し次の等式が成り立つ．

$$\|D_+F\|^2 = \kappa(p)\, \|D_-F\|^2 + \frac{1}{p}\, \|D_0F\|^2 + \Omega(F). \tag{7.117}$$

定理 7.32 の証明に先立ち，次の**矢野・ボホナーの公式**（K. Yano, Ann. Math., **55** (1952), pp. 328–347, (2.4) 式）を思い起こそう：

$$\Omega(F) = \int_M \Big\{ \sum F^{ii_2\cdots i_p,j}\, F_{ji_2\cdots i_p,i} - \sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\, F^j{}_{i_2\cdots i_p,j} \Big\}\, v_g. \tag{7.118}$$

証明 矢野・ボホナーの公式 (7.118) を証明する．

（第1段）次式が成立する．これは微分を実行すればよい．

$$\sum \left(F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\, F^j{}_{i_2\cdots i_p}\right)_{,i} = \sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j\,,i}\, F^j{}_{i_2\cdots i_p} + \sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\, F^j{}_{i_2\cdots i_p,i}. \tag{7.119}$$

（第2段）次に，**リッチの公式**を思い起こそう：

$$F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j,k} - F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,k\,,j} = \sum F^{ai_2\cdots i_p}\, R^i{}_{ajk} + \sum F^{iai_2\cdots i_p}\, R^{i_2}{}_{ajk}$$

$$+\cdots+\sum F^{ii_2\cdots i_{p-1}a}\,R^{i_p}{}_{ajk}. \qquad (7.120)$$

(7.120) において，i と k について縮約をとれば，(7.120) は次のようになる．

$$F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j,i}=F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i\,,j}+\sum F^{ai_2\cdots i_p}\,\rho_{aj}+\sum F^{iai_2\cdots i_p}\,R^{i_2}{}_{aji}$$
$$+\cdots+\sum F^{ii_2\cdots i_{p-1}a}\,R^{i_p}{}_{aji}. \qquad (7.121)$$

（第3段）この (7.121) を (7.119) に代入すると，$R_{ijk\ell}=R_{\ell kji}$ を使い，((7.119) の右辺)

$$\begin{aligned}&=\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i\,,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}+\sum \rho_{ij}\,F^{ii_2\cdots i_p}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}\\&\qquad+\sum F^{iai_3\cdots i_p}\,R^{i_2}{}_{aji}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}+\cdots\\&\qquad+\sum F^{ii_2\cdots i_{p-1}a}\,R^{i_p}{}_{aji}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}+\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p,i}\\&=\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i\,,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}+\sum \rho_{ij}\,F^{ii_2\cdots i_p}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}\\&\quad+(p-1)\sum R_{ijk\ell}\,F^{iki_2\cdots i_p}\,F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p}+\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p,i}\end{aligned} \qquad (7.122)$$

を得る．ここで (7.122) の右辺の第1項について，

$$\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i\,,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}=\sum\left(F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}\right)_{,j}-\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p,j} \qquad (7.123)$$

となるので，これを (7.122) の第1項に代入して，M 上で (7.119) を積分する．

（第4段）グリーンの公式より，

$$\begin{aligned}0&=\int_M\left\{\sum\left(F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}\right)_{,i}-\sum\left(F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}\right)_{,j}\right\}v_g\\&=\int_M\left\{\sum \rho_{ij}\,F^{ii_2\cdots i_p}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p}+(p-1)\sum R_{ijk\ell}\,F^{iki_2\cdots i_p}\,F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p}\right.\\&\qquad\left.+\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,j}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p,i}-\sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^{j}{}_{i_2\cdots i_p,j}\right\}v_g\end{aligned} \qquad (7.124)$$

これから (7.118) を得た．□

そこで (7.118) の右辺を D_+F, D_-F, D_0F を用いて表そう．そのために次の3つの補題を用意する．

補題 7.33　$Q(F) := \int_M \sum F^{ii_2\cdots i_p,j} F_{ji_2\cdots i_p,i}\, v_g$ とおくと，次式が成立する．

$$(p+1)\left(\|D_+F\|^2 + \|D_-F\|^2\right) = p\,Q(F) + \|\nabla F\|^2. \tag{7.125}$$

証明　M 上の各点毎に計算する．$I := \{i_1, \ldots, i_{p+1}\} \subset \{1, \ldots, n\}$．$I_s := \{i_1, \ldots, \widehat{i_s}, \ldots, i_{p+1}\}$（$\widehat{i_s}$ は i_s を除くことを意味する）とすると，

$$\begin{aligned}(p+1)^2\left(\|D_+F\|^2 + \|D_-F\|^2\right) &= \|(p+1)\,H\|^2 \\ &= \sum_I \left(\sum_{s=1}^{p+1} F^{I_s,i_s}\right)\left(\sum_{t=1}^{p+1} F_{I_t,i_t}\right)\end{aligned} \tag{7.126}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}(7.126)\ \text{の右辺} &= (p+1)p\sum F^{ii_2\cdots i_p,j} F_{ji_2\cdots i_p,i} \\ &\quad + (p+1)\sum F^{ii_2\cdots i_p,j} F_{ii_2\cdots i_p,j}.\end{aligned} \tag{7.127}$$

なぜなら，(7.126) の右辺の和について，$s \neq t$ のとき，$F \in \Gamma(S^p(M))$ なので，$\sum_I F^{I_s,i_s} F_{I_t,i_t} = \sum F^{ii_2\cdots i_p,j} F_{ji_2\cdots i_p,i}$ であり，このような項は $(p+1)p$ 個あり，$s = t$ となるものが $p+1$ 個ある．これから (7.127) を得る．

(7.126), (7.127) の両辺を M 上で積分して (7.125) を得る．□

補題 7.34　次の等式が成り立つ：

$$\|D_+F\|^2 = Q(F) + \frac{1}{p}\|D_0F\|^2. \tag{7.128}$$

証明　定義 7.31 (7.115) より，

$$\|\nabla F\|^2 = \|D_+F\|^2 + \|D_-^{\#}F\|^2 + \|D_0F\|^2.$$

ここで $D_-F = \mathcal{S}(D_-^{\#}F)$ より，補題 7.28 を使い，

$$\|D_-F\|^2 = \|\mathcal{S}(D_-^{\#}F)\|^2 = \frac{1}{p+1}\|D_-^{\#}F\|^2.$$

よって，補題 7.33 より，

$$(p+1)\left(\|D_+F\|^2+\|D_-F\|^2\right) = pQ(F)+\|D_+F\|^2+(p+1)\,\|D_-F\|^2+\|D_0F\|^2.$$

これから，

$$p\,\|D_+F\|^2 = p\,Q(F) + \|D_0F\|^2$$

すなわち，(7.128) を得た．□

補題 7.35　(7.118) 第 2 項の積分について次の等式が成り立つ：

$$\int_M \sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^j{}_{i_2\cdots i_p,j}\,v_g = (p+1)\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\|D_-F\|^2. \qquad (7.129)$$

証明　M 上の各点毎に計算する．補題 7.27 を使う．縮小 $\beta : S^{p+1}V \to \Theta^{p-1}V$ について，定義 7.16 より，$D_+F \in \Gamma(\Theta^{p+1}) = \Gamma(\mathrm{Ker}(\beta))$ なので，(7.114) より，

$$\beta(D_-F) = \beta(D_+F + D_-F) = \beta(H).$$

ここで $\beta(H)$ の成分は命題 7.29 (7.110) と (7.71) より，

$$\beta(H)^{i_3\cdots i_{p+1}} = \frac{1}{p+1}\sum g_{ij}\left\{F^{ii_3\cdots i_{p+1},j} + F^{ji_3\cdots i_{p+1},i} + \sum_{s=3}^{p+1} F^{iji_3\cdots \widehat{i_s}\cdots i_{p+1},i_s}\right\}$$

$$= \frac{2}{p+1}\sum_{i=1}^{n} F^{ii_3\cdots i_{p+1}}{}_{,i} \qquad (7.130)$$

ここで (7.130) の第 1 式の右辺の第 1 項 = 第 2 項 であり，$F \in \Gamma(\Theta^p)$ より第 3 項 $= 0$ なので，(7.130) の第 2 式が得られる．ゆえに，(7.130) より，

$$\int_M \sum F^{ii_2\cdots i_p}{}_{,i}\,F^j{}_{i_2\cdots i_p,j}\,v_g = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \|\beta(D_-F)\|^2$$

$$= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \frac{4}{p+1}\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\|D_-F\|^2$$

(補題 7.27 (7.97) より)

$$= (p+1)\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\|D_-F\|^2 \qquad (7.131)$$

を得た.□

（定理 7.32 の証明）以上の準備の下で定理 7.32 を証明する．(7.118) と補題 7.35 より，

$$\Omega(F) = Q(F) - (p+1)\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\|D_-F\|^2$$

$$= \|D_+F\|^2 - \frac{1}{p}\|D_0F\|^2 - (p+1)\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\|D_-F\|^2 \qquad (7.132)$$

を得た．これは求める等式 (7.116) である．(7.132) の第2式では補題 7.34 を使った．□

次に作用素 $D_+ : \Gamma(\Theta^p) \to \Gamma(\Theta^{p+1})$ について，次の定理が成り立つ．

定理 7.36

(7.116) 及び定義 7.31 のように，$F \in \Gamma(\Theta^p)$ に対して，$\mathcal{S}(\nabla F)$ の Θ^{p+1}-成分を D_+F とする．このとき，作用素

$$D_+ : \Gamma(\Theta^p) \ni F \mapsto D_+(F) \in \Gamma(\Theta^{p+1})$$

は1階楕円型偏微分作用素である．

証明　（第1段）D_+ が楕円型であることを示すためには，任意の点 $x_0 \in M$ と任意の $\xi_0 \in T^*_{x_0}M - \{0\}$ に対して，D_+ のシンボル写像　$\sigma(D_+)(\xi_0) : \Theta^p(T_{x_0}M) \to \Theta^{p+1}(T_{x_0}M)$ が単射であることを示せば良い．ここでシンボル写像は $v \in \Theta^p(T_{x_0}M)$ に対して，$F \in \Gamma(\Theta^p)$ を $F(x_0) = v$ とするとき，

$$\sigma(D_+)(\xi_0)v := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-t\,f(x_0)}\,D_+(e^{tf}\,F)(x_0)$$

と与えられている．ここで $f \in C^\infty(M)$ は $df_{x_0} = \xi_0$ を満たすものである．

（第2段）さて，ある $x_0 \in M$ と $\xi_0 \in T^*_{x_0}M - \{0\}$ について，結論が成り立たないと仮定して，矛盾が導かれることを示そう．

この仮定より，$F \in \Gamma(\Theta^p)$ として，その台 $\mathrm{supp}(F)$ が x_0 の十分小さな近傍に含まれ，$F(x_0) \neq 0$ を満たすものであり，$f \in C^\infty(M)$ として，$df_{x_0} = \xi_0$

となるものが存在して，

$$\sigma(D_+)(\xi)\,F(x) = 0 \qquad (\xi := df_x), \quad \exists\, x \in M$$

を満たす．

（第 3 段）ここで，正定数 $C > 0$ が存在して，任意の $F \in \Gamma(\Theta^p)$ に対して，

$$\|\nabla F\|^2 \le C\,(\|D_+F\|^2 + \|F\|^2) \tag{7.133}$$

が成り立つ．実際，補題 7.33 と補題 7.34 より

$$\begin{aligned}\|\nabla F\|^2 &= (p+1)\big(\|D_+F\|^2 + \|D_-F\|^2\big) - p\,Q(F)\\ &= \|D_+F\|^2 + (p+1)\|D_-F\|^2 + \|D_0F\|^2.\end{aligned} \tag{7.134}$$

定理 7.32 より，

$$\|D_-F\|^2 + \|D_0F\|^2 \le C_1\,\|D_+F\|^2 + C_2\,|\Omega(F)|. \tag{7.135}$$

M はコンパクトなので，

$$|\Omega(F)| \le C_3\,\|F\|^2. \tag{7.136}$$

(7.134), (7.135), (7.136) を合わせて (7.133) を得る．

（第 4 段）さて D_+ は 1 階の偏微分作用素なので，

$$D_+(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F) = e^{\sqrt{-1}\,tf}\,\big\{\sqrt{-1}\,t\,\sigma(D_+)(\xi)\,F(x) + (t\text{ について定数項})\big\} \tag{7.137}$$

となる．ここで（第 2 段）の仮定より，(7.137) の第 1 項 $= 0$．したがって，$\|D_+(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F)\|^2$ は t について定数となる．かつ $\|e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F\| = \|F\|^2$ だから，(7.133) より，

$$\begin{aligned}\|\nabla(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F)\| &\le C\,\big(\|D_+(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F)\|^2 + \|e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F\|\big)\\ &= C\big(\,(t\text{ について定数項}) + \|F\|^2\big)\end{aligned} \tag{7.138}$$

よって，(7.138) は t について有界となる．ところが，共変微分 ∇ は 1 階の楕

円型偏微分作用素でもあるので，

$$\nabla(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F) = e^{\sqrt{-1}\,tf}\left\{\sqrt{-1}\,t\,\sigma(\nabla)(\xi)\,F(x) + (t\ \text{について定数項})\right\} \tag{7.139}$$

において，$\sigma(\nabla)(\xi)F(x)\neq 0$ でなければならない．したがって，$\|\nabla(e^{\sqrt{-1}\,tf}\,F)\| = O(|t|)$ であり，t について非有界となる．このことは (7.138) に反し，矛盾である．定理 7.36 を得た．□

7.7 主定理 7.10 の証明

本節では n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M,g) が 7.1 節の定義 7.2 にあるように（負の意味で）$\frac{1}{n}$-ピンチされていると仮定する．$n=\dim M\geq 3$ と仮定する．主定理 7.10 の証明のために，まず定理 7.32 における $\Gamma(\Theta^p)$ 上の 2 次形式 $\Omega(F)$ $(F\in\Gamma(\Theta^p))$ が正定値かどうかを調べよう．

例 （定曲率空間の場合） (M,g) を n 次元コンパクト・定曲率リーマン多様体とし，κ を (M,g) のスカラー曲率，ρ_{ij} をリッチテンソル場，$R_{ijk\ell} = \sum_{s=1}^n g_{is}\,R^s{}_{jk\ell}$ を曲率テンソル場とする．このとき

$$\begin{cases} \rho_{ij} = \dfrac{\kappa}{n}\,g_{ij} \\ R_{ijk\ell} = \dfrac{\kappa}{n(n-1)}\,(g_{kj}\,g_{i\ell} - g_{j\ell}\,g_{ik}) \end{cases} \tag{7.140}$$

となる．したがって $F\in\Gamma(\Theta^p)$ に対して，$\Omega(F)$ は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \Omega(F) &= -\int_M \left\{\frac{\kappa}{n}\,g_{ij}\,F^{ii_2\cdots i_p}\,F^j{}_{i_2\cdots i_p} + \frac{(p-1)\,\kappa}{n(n-1)}\,(g_{kj}\,g_{i\ell} - g_{j\ell}\,g_{ik}) \right.\\ &\qquad\qquad \left. \times F^{iki_3\cdots i_p}\,F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p}\right\} v_g \\ &= -\left(\frac{\kappa}{n} + \frac{(p-1)\,\kappa}{n(n-1)}\right)\|F\|^2 \\ &= -\frac{n+p-2}{n(n-1)}\,\kappa\,\|F\|^2 \end{aligned} \tag{7.141}$$

となる．ゆえに，次を得る．

$$\begin{cases} \kappa > 0 \text{ ならば}, \Omega(F) \text{ は負定値であり}, \\ \kappa < 0 \text{ ならば}, \Omega(F) \text{ は正定値となる}. \end{cases} \tag{7.142}$$

ゆえに，一般に (M, g) の曲率が負定曲率に十分近ければ，$\Omega(F)$ は正定値となる．次の定理が成り立つ．

定理 7.37　n 次元コンパクト・リーマン多様体 (M, g) が $\frac{1}{n}$-ピンチされているならば，$\Omega(F)$ は正定値である．

定理 7.37 の証明のために次の準備をする．M 上の各点 $x \in M$ 毎に $\Omega(F)$ の被積分関数の評価を行う．$V := T_xM$ とおき，次のような Θ^2V 上の 2 次形式

$$Q_2(s) := -\sum R_{ijk\ell}\, s^{ik}\, s^{j\ell} \qquad \left(s = \sum s^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Theta^2 V\right) \tag{7.143}$$

を考える．

補題 7.38　(M, g) が点 $x \in M$ で $\frac{1}{n}$-ピンチされているとき，2 次形式 Q_2 は正定値である．

証明　（第 1 段）$0 \neq s \in \Theta^2V$ を任意に取って固定する．このときリーマン計量 g による V 上の内積 $\langle\, ,\, \rangle$ に関する V の正規直交基底 $\{v^i\}_{i=1}^n$ を取り，$s = \sum_{i=1}^n c_i\, v^i \otimes v^i$ $(c_i \in \mathbb{R})$ とできる．実際，$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n P_{ki}\, v^k$ と変換する．ここで $P = (P_{ki})$ は n 次の実正則行列である．このとき，

$$s = \sum_{i,j=1}^n s^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k,\ell=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n P_{ki}\, s^{ij}\, P_{\ell j}\right) v^k \otimes v^\ell,$$

$$(\langle v^k, v^\ell\rangle)^{-1} = P\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\right)^{-1}\, {}^tP \tag{7.144}$$

となる．ここで $\left(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle\right)^{-1}$ は正定値対称行列で，(s^{ij}) は対称行列なので，正則行列 P を適当に選び，(7.144) の右辺が単位行列で，$P\,(s^{ij})\,{}^tP$ が対角行列となるようにできる（[48]，p.165 を見よ）．これから言える．

（第2段）このとき $s \in \Theta^2 V$ および $\Theta^2 V$ の定義より，$\sum_{i=1}^n c_i = 0$ かつ $\|s\|^2 = \langle s, s\rangle = \sum_{i=1}^n {c_i}^2$ である．一方，

$$Q_2(s) = -\sum_{i,j=1}^n R_{ijij}\, c_i\, c_j = \sum_{i,j=1}^n K_{ij}\, c_i\, c_j \qquad (7.145)$$

となる．ここで

$$R_{ijij} = \langle R(v^i, v^j)v^j, v^i\rangle = -K_{ij} \qquad (i \neq j)$$

であり，$K_{ij} = K(v^i, v^j)$ は $\{v^i,\, v^j\}$ の定める T_xM 内の平面における (M,g) の断面曲率を表す．

（第3段）いま，(M,g) が α-ピンチされているとする．このとき，正定数 $A > 0$ が存在して，

$$-1-\alpha < \frac{K_{ij}}{A} < -1+\alpha \qquad (\forall\, i \neq j)$$

すなわち，$-\alpha\, A < K_{ij} + A < \alpha\, A$ となる．

$$Q_2(s) = \sum_{i\neq j}(K_{ij}+A)\, c_i\, c_j - A\sum_{i\neq j} c_i\, c_j \qquad (7.146)$$

において，$(\sum_{i=1}^n c_i)^2 = 0$ なので，$-\sum_{i\neq j} c_i\, c_j = \sum_{i=1}^n {c_i}^2$ である．

ゆえに

$$(7.146)\text{ の第2項} = -A\sum_{i\neq j} c_i\, c_j = A\sum_{i=1}^n {c_i}^2 = A\,\|s\|^2$$

$$\begin{aligned}|(7.146)\text{ の第1項}| &= \left|\sum_{i\neq j}(K_{ij}+A)\, c_i\, c_j\right| < A\alpha\sum_{i\neq j}|c_i|\,|c_j| \\ &\leq A\alpha\left(\sum_{i=1}^n |c_i|\right)^2 \leq A\alpha\, n\,\|s\|^2,\end{aligned}$$

最後の不等式において，不等式 $(\sum_{i=1}^n |c_i|)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |c_i|^2 = \|s\|^2$ を使った．

ゆえに，

$$Q_2(s) > A\,\|s\|^2 - A\,\alpha\,n\,\|s\|^2 = A\,(1-\alpha\,n)\,\|s\|^2. \tag{7.147}$$

ゆえに $0 < \alpha \leq \frac{1}{n}$ のとき，$Q_2(s) > 0$ $(0 \neq s \in \Theta^2 V)$．補題 7.38 を得た．□

補題 7.39　$V = T_xM$ 上の 2 次形式

$$Q_1 := -\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij}\, s^i\, s^j \qquad \left(s = \sum_{i=1}^{n} s^i\, \frac{\partial}{\partial x^i} \in V\right)$$

は (M, g) の $x \in M$ での断面曲率が常に負ならば，正定値である．

証明　補題 7.38 の証明の第 1 段と同様に，$V = T_xM$ の $\langle\,,\,\rangle$ に関する正規直交基底 $\{v^i\}_{i=1}^n$ を取り，$\rho(v^i, v^j) = 0$ $(i \neq j)$ となるようにできる．このとき，

$$\rho(v^i, v^i) = \sum_{j \neq i} K(v^i, v^j) < 0$$

であるから，$s = \sum_{i=1}^n s^i\, v^i \neq 0$ に対して，

$$Q_1 = -\sum_{i=1}^{n} \rho(v^i, v^i)\,(s^i)^2 > 0$$

となり，補題 7.39 を得た．□

証明　定理 7.37 の証明をする．

（第 1 段）(7.117) 式の $\Omega(F)$ の被積分関数を M 上の各点 $x \in M$ で計算する．$(g_{ij}) = P\,{}^tP$ と正則行列 $P = (P_{ij})$ によって，正定値行列 (g_{ij}) は表示でき，$g_{ij} = \sum_{k=1}^n P_{ik}\, P_{jk}$ となるので，

$$\begin{aligned}\sum F^{ii_2\cdots i_p}\, F^{j}{}_{i_2\cdots i_p} &= \sum F^{ii_2\cdots i_p}\, F^{jj_2\cdots j_p}\, g_{i_2 j_2}\, \cdots\, g_{i_p j_p} \\ &= \sum_{k_2,\cdots,k_p} \left(\sum F^{ii_2\cdots i_p}\, P_{i_2 k_2}\, \cdots\, P_{i_p k_p}\right)\left(\sum F^{jj_2\cdots j_p}\, P_{j_2 k_2}\, \cdots\, P_{j_p k_p}\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k_2,\cdots,k_p} s^i{}_{k_2\cdots k_p} s^j{}_{k_2\cdots k_p} \tag{7.148}$$

を得る．ここで $s^i{}_{k_2\cdots k_p} := \sum F^{ii_2\cdots i_p} P_{i_2k_2} \cdots P_{i_pk_p}$ とおいた．

同様にして，

$$\sum F^{iki_3\cdots i_p} F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p} = \sum_{k_3,\cdots,k_p} s^{ik}{}_{k_3\cdots k_p} s^{j\ell}{}_{k_3\cdots k_p} \tag{7.149}$$

を得る．ここで $s^{ik}{}_{k_3\cdots k_p} := \sum F^{iki_3\cdots i_p} P_{i_3k_3} \cdots P_{i_pk_p}$ とおいた．

（第2段）よって，(7.148), (7.149) より，

$$-\sum \rho_{ij} F^{ii_2\cdots i_p} F^j{}_{i_2\cdots i_p}$$

$$= \sum_{k_2,\cdots,k_p} Q_1(s_{k_2\cdots k_p}) - \sum R_{ijk\ell} F^{iki_3\cdots i_p} F^{j\ell}{}_{i_3\cdots i_p} \tag{7.150}$$

$$\left(\text{ここで } s_{k_2\cdots k_p} := \sum_{i=1}^n s^i{}_{k_2\cdots k_p} \frac{\partial}{\partial x^i} \in V\right)$$

$$= \sum_{k_3,\cdots,k_p} Q_2(s_{k_3\cdots k_p}) \tag{7.151}$$

$$\left(\text{ここで } s_{k_3\cdots k_p} := \sum_{i,j=1}^n s^{ij}{}_{k_3\cdots k_p} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Theta^2 V\right)$$

を得る．

（第3段）以上より，補題 7.38 と補題 7.39 が適用できて，$F \in \Gamma(\Theta^p)$ が任意の点 $x \in M$ において零でなければ，その点において，$\Omega(F)$ の被積分関数は正値である．結局 M 上での積分値 $\Omega(F) > 0$ である．定理 7.37 を得た．□

証明　主定理 7.10 の証明を行う．

（第1段）(M,g) を $\frac{1}{n}$-ピンチされたコンパクト・リーマン多様体とし，命題 7.30 に従い，$f \in H^p(M) \cap C^\infty(S^*M)$ に対し，

$$\Xi f = \Xi_+ f + \Xi_- f \quad (\Xi_+ f \in H^{p+1}(M),\, \Xi_- f \in H^{p-1}(M)) \tag{7.152}$$

とおき，$F := \gamma(f) \in \Gamma(\Theta^p)$ とすると，命題 7.29 と定義 7.31 より，

$$D_+F = \gamma(\Xi_+ f),\ D_- f = \alpha(\gamma(\Xi_- f))$$

であり，$\frac{1}{n}$-ピンチなので定理 7.37 より，$\Omega(F)$ は正定値である．このとき，

$$\|\Xi_+ f\|^2 \geq a(p)\,\|\Xi_- f\|^2, \tag{7.153}$$

$$a(p) := \left(1 + \frac{n-2}{2p}\right)^2 \frac{p(p+1)}{(p+\frac{n}{2})(p+\frac{n}{2}-1)} \tag{7.154}$$

である．実際，

$$\begin{aligned}\gamma(p+1)\,\|\Xi_+ f\|^2 &= \|\gamma(\Xi_+ f)\|^2 = \|D_+F\|^2 && \text{(補題 7.18)}\\ &\geq \kappa(p)\,\|D_-F\|^2 = \kappa(p)\,\|\alpha(\gamma(\Xi_- f))\|^2 && \text{(定理 7.32)}\\ &= \kappa(p)\,\alpha(p-1)\,\gamma(p-1)\,\|\Xi_- f\|^2 && \text{(補題 7.26, 7.18)}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}a(p) &= \frac{\kappa(p)\,\alpha(p-1)\,\gamma(p-1)}{\gamma(p+1)}\\ &= (p+1)\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\frac{4}{p+1}\left(1+\frac{n-2}{2p}\right)\frac{2^{p-1}\,\Gamma\left(p-1+\frac{n}{2}\right)\Gamma(p)^{-1}}{2^{p+1}\,\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma(p+2)^{-1}}\\ &= \left(1+\frac{n-2}{2p}\right)^2\frac{p(p+1)}{\left(p+\frac{n}{2}\right)\left(p+\frac{n}{2}-1\right)} \qquad (7.155)\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$a(p) = 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \tag{7.156}$$

となる．高木貞治著『解析概論』（岩波書店），p.178，定理 45

> 無限積 $p = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \quad (u_n \to 0)$ は $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$ が収束するとき収束する．また因子の中に 0 がなければ，積が 0 にならない．

より従って，2つの正定数 $c > 0,\ c' > 0$ が存在して，任意の非負整数 $s \geq 0$ と十分大なる正数 $p > 0$ に対して，

$$c \geq \prod_{i=0}^{s} a(p+i) \geq c' > 0 \tag{7.157}$$

が成り立つ．

（第2段）さて，$f \in C^\infty(S^*M)$ が $f = \sum_{p=0}^{N} f_p\ (f_p \in H^p(M))$ を満たし，Ξ の任意の閉積分曲線 $\tilde{\gamma}$ に対して，$\int_{\tilde{\gamma}} f = 0$ を満たすとする．リヴシックの定理 7.11 より，$f = \Xi u$ となる $u \in C^1(S^*M)$ が存在する．ここで (7.18) $L^2(S^*M) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(M)$ より，

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p \qquad (u_p \in H^p(M)) \tag{7.158}$$

であり，$u \in C^1(S^*M)$ より，

$$\Xi u = \sum_{p=0}^{\infty} \Xi u_p \qquad (L^2\text{-収束}) \tag{7.159}$$

となっている．命題 7.30 より，

$$\Xi_- u_{p+1} + \Xi_+ u_{p-1} = f_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7.160}$$

となる．ここで $f_p = 0\ (p > N)$ より，

$$\Xi_- u_{p+1} + \Xi_+ u_{p-1} = 0 \qquad (p > N) \tag{7.161}$$

である．

（第3段）さらに，$u_p = 0\ (p \geq N)$ が成り立つ．なぜなら，(7.153) と (7.161) より，$p > N$ に対して，

$$\|\Xi_+ u_{p+1}\|^2 \geq a(p+1)\,\|\Xi_- u_{p+1}\|^2 = a(p+1)\,\|\Xi_+ u_{p-1}\|^2 \tag{7.162}$$

となる．したがって $p \geq N$ と $i = 0, 1, \ldots$ に対して，

$$\|\Xi_+ u_p\|^2\, a(p+2)\, a(p+4)\ \cdots\ a(p+2i) \leq \|\Xi_+ u_{p+2i}\|^2 \tag{7.163}$$

となる．ここで $u \in C^1(S^*M)$ より，$\Xi u = \sum_{p=0}^{\infty} \Xi u_p$（$L^2$-収束）であるので，$\lim_{j\to\infty} \|\Xi_+ u_j\| = 0$ となる．ゆえに第 1 段の (7.157) より，

$$\|\Xi_+ u_p\| = 0 \qquad (p \geq N) \tag{7.164}$$

を得る．

ここで $H_p := \gamma(u_p) \in C^1(\Theta^p)$ で，命題 7.30 と定義 7.31 より，

$$\gamma(\Xi_+ u_p) = D_+ H_p$$

となる．さらに命題 7.18 より，

$$\|D_+ H_p\|^2 = \gamma(p+1)\, \|\Xi_+ u_p\|^2 = 0 \qquad (p \geq N) \tag{7.165}$$

となる．ゆえに定理 7.32 と定理 7.37 により $\Omega(F) > 0$ なので，

$$(7.165)\ \text{の左辺} = \kappa(p)\, \|D_- H_p\|^2 + \frac{1}{p}\, \|D_0 H_p\|^2 + \Omega(H_p) \tag{7.166}$$

と合わせて，任意の $p \geq N$ に対して，$\Omega(H_p) = 0$, ゆえに $H_p = 0$ $(p \geq N)$ を得る．ゆえに補題 7.18 より，$u_p = 0$ $(p \geq N)$ を得た．

（第 4 段）$u_p \in C^\infty(S^*M)$ $(p = 0, 1, \ldots, N-1)$ を示そう．これが示されれば定理 7.10 の証明は終わる．$f = \sum_{p=0}^{N} f_p \in C^\infty(S^*M)$ より，(7.160) を使い，

$$\Xi_+ u_{N-1} = f_N - \Xi_- u_{N+1} = f_N \in C^\infty(S^*M)$$

である．ここで $\Xi_+ u_{N-1} = \gamma(D_+ H_{N-1})$ なので，$D_+ H_{N-1}$ は C^∞ である．ここで定理 7.36 より，D_+ は楕円型偏微分作用素なのであるから，H_{N-1} は C^∞ であり，したがって，$H_{N-1} = \gamma(u_{N-1})$ より，u_{N-1} も C^∞ となる．

次に，

$$\begin{aligned}
\Xi_+ u_{N-2} &= f_{N-1} - \Xi_- u_N = f_{N-1}, \\
\Xi_+ u_{N-3} &= f_{N-2} - \Xi_- u_{N-1}, \\
&\ \vdots
\end{aligned} \tag{7.167}$$

を用い，$u_{N-2}, u_{N-3}, \ldots$ も C^∞ であることがわかる．定理 7.10 を得た．□

7.8 残された3つの補題の証明

$\dim V \geq 3$ とする．このとき，3つの $S(V)$-同変同型 $\gamma : H^p \to \Theta^p V$, $\alpha : \Theta^p V \to \widetilde{\Theta}^p$ 及び $\mathcal{S} : W_- \to \widetilde{\Theta}^{p-1}$（命題 7.23 を参照）について，各空間 H^p, $\Theta^p V$ 及び W_- の複素化は $SO(V)$-既約であった．

このとき一般に，次の補題が成立する．

補題 7.40 H_i $(i=1,2)$ を $G = SO(n)$ $(n \geq 3)$ が作用する実ベクトル空間で，それぞれ G-不変な内積 $\langle\,,\,\rangle_i$ $(i=1,2)$ をもつとし，$\Phi : H_1 \to H_2$ が G-同変な同型対応であるとする．さらに H_i の複素化 ${H_i}^{\mathbb{C}}$ が G-既約であるとする．このとき，正定数 $C > 0$ が存在して，

$$\langle u, v\rangle_1 = C\,\langle \Phi(u), \Phi(v)\rangle_2 \qquad (\forall\, u,\, v \in H_1)$$

が成り立つ．

証明 （第1段）内積 $\langle\,,\,\rangle_i$ を ${H_i}^{\mathbb{C}}$ 上のエルミート内積に拡張すると（同じ記号で表す），これらは G-同変であり，Φ を ${H_1}^{\mathbb{C}} \to {H_2}^{\mathbb{C}}$ に $\mathbb{C}$-線形となるように拡張すると，Φ は ${H_1}^{\mathbb{C}} \to {H_2}^{\mathbb{C}}$ G-同変な $\mathbb{C}$ 上の同型対応となっている．

（第2段）さて，新しい G-同変なエルミート内積 $\langle\,,\,\rangle'$ を

$$\langle u, v\rangle' := \langle \Phi(u), \Phi(v)\rangle_2 \qquad (u,\, v \in {H_1}^{\mathbb{C}}) \tag{7.168}$$

と定義する．このとき，${H_1}^{\mathbb{C}}$ 上には2つのエルミート内積 $\langle\,,\,\rangle'$, $\langle\,,\,\rangle_1$ が定義されている．したがって $\mathbb{C}$ 線形写像 $P : {H_1}^{\mathbb{C}} \to {H_2}^{\mathbb{C}}$ が存在して，

$$\langle Pu, v\rangle' = \langle u, v\rangle_1 \qquad (u, v \in {H_1}^{\mathbb{C}}) \tag{7.169}$$

が成り立つ．このとき，

$$\langle Pu, v\rangle' = \langle u, Pv\rangle' \qquad (u, v \in {H_1}^{\mathbb{C}}) \tag{7.170}$$

である．実際，

$$\langle Pu, v\rangle' = \langle u, v\rangle_1 = \overline{\langle v, u\rangle_1} = \overline{\langle Pv, u\rangle'} = \langle u, Pv\rangle'.$$

（第3段）P の固有値はすべて実数であり，それらを $a_1, \ldots, a_N$ とすると，

$$H_1{}^{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{N} V_i, \quad \text{ここで } Pv = a_i v \ (\forall\, v \in V_i) \ (i = 1, \ldots, N)$$

と分解する．このとき，V_i $(i = 1, \ldots, N)$ は G-不変である．実際，任意の $v \in H_1{}^{\mathbb{C}}$ と $A \in G$ に対して，

$$\langle P(Au), v\rangle' = \langle Au, v\rangle_1 = u, A^{-1}v\rangle_1 = \langle Pu, A^{-1}v\rangle' = \langle A(Pu), v\rangle'$$

となるから．$P(Au) = a_i\, Au$ $(u \in V_i)$ を得る．ゆえに $Au \in V_i$ となるから．

最後に $H_1{}^{\mathbb{C}}$ は G-既約なので $H_1{}^{\mathbb{C}} = V_1$ となり，求める結論を得る．□

補題 7.40 を使って，3つの補題 7.18, 補題 7.26 及び 補題 7.28 を示そう．

このためには，補題 7.40 より，特別な元で計算してそれぞれの定数を決定すれば良い．

証明　補題 7.26 の証明.

実際に，(7.96) を示す：

$$\|\alpha(F)\|^2 = \alpha(p)\,\|F\|^2 \quad (F \in \Theta^p V), \qquad \alpha(p) = \frac{4}{p+2}\left(1 + \frac{n-2}{2(p+1)}\right).$$

（第1段）$\dim V = 2$ の場合．V 上の内積 $\langle\, ,\rangle$ を $V^{\mathbb{C}}$ 上のエルミート内積に拡張し，これから $(\Theta^p V)^{\mathbb{C}}$ 上のエルミート内積に拡張して計算する．$(V, \langle\, ,\rangle)$ の正規直交基底を $\{v^1, v^2\}$ とする．$w := v^1 + \sqrt{-1}v^2$, $\overline{w} := v^1 - \sqrt{-1}\,v^2$ とすれば，$\langle w, w\rangle = \langle \overline{w}, \overline{w}\rangle = 2$ かつ $\langle w, \overline{w}\rangle = 0$ となる．

$G := v^1 \otimes v^1 + v^2 \otimes v^2 = \frac{1}{2}(w \otimes \overline{w} + \overline{w} \otimes w) \in S^2 V$, $w^p := \overbrace{w \otimes \cdots \otimes w}^{p} \in \Theta^p V$ とすれば，$(\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2)^p \in H^p(V^*)$ で $w^p = \gamma((\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2)^p)$ である．

そこで，

$$\begin{aligned}\alpha(w^p) &= \mathcal{S}(w^p \otimes G) = \mathcal{S}\left(w^p \otimes \frac{1}{2}(w \otimes \overline{w} + \overline{w} \otimes w)\right)\\ &= \frac{1}{p+2} \sum_{r+s=p+1} w^r \otimes \overline{w} \otimes w^s \qquad (7.171)\end{aligned}$$

ここで $\|w\|^2 = 2$, $\|w^p\|^2 = 2^p$ であり，(7.171) の右辺の各項は互いに直交していて $p+2$ 個ある．ゆえに，

$$\|\alpha(w^p)\|^2 = \frac{1}{(p+2)^2}\,(p+2)\,2^{p+2} = \frac{4}{p+2}\,\|w^p\|^2. \tag{7.172}$$

これから $\alpha(p) = \frac{4}{p+2}$ を得る．

（第2段）$n = \dim V \geq 3$ のとき．$\{v^1, \ldots, v^n\}$ を V の正規直交基底とする．$w := v^1 + \sqrt{-1}\,v^2$ とおくと，$w^p \in \Theta^p V$ である．

$$\begin{aligned}
\alpha(w^p) &= \mathcal{S}(w^p \otimes G) \\
&= \mathcal{S}(w^p \otimes (v^1 \otimes v^1 + v^2 \otimes v^2 + \cdots + v^n \otimes v^n)) \\
&= \mathcal{S}(w^p \otimes (v^1 \otimes v^1 + v^2 \otimes v^2)) + \mathcal{S}(w^p \otimes v^3 \otimes v^3 + \cdots + v^n \otimes v^n)) \\
&= \frac{1}{p+2} \sum_{r+s=p+1} w^r \otimes \overline{w} \otimes w^s + \sum_{k=3}^{n} \rho_k
\end{aligned} \tag{7.173}$$

ここで

$$\rho_k := \frac{2}{(p+2)(p+1)} \sum_{r+s+t=p} w^r \otimes v^k \otimes w^s \otimes v^k \otimes w^t \tag{7.174}$$

であり，ρ_k の各項は $\binom{p+2}{2} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}$ 個の互いに直交するものの和である．さらに $\|w^r \otimes v^k \otimes w^s \otimes v^k \otimes w^t\|^2 = 2^p$ となるので，$\|\rho_k\|^2 = \frac{4}{(p+2)^2(p+1)^2}\binom{p+2}{2}\,2^p = \frac{2^{p+1}}{(p+2)(p+1)}$ である．一方，$\|w^p\|^2 = 2^p$ である．以上より，

$$\begin{aligned}
\alpha(p) = \frac{\|\alpha(w^p)\|^2}{\|w^p\|^2} &= \frac{1}{2^p}\left\{\frac{2^{p+2}}{p+2} + (n-2)\,\frac{2^{p+1}}{(p+2)(p+1)}\right\} \\
&= \frac{4}{p+2}\left\{1 + \frac{n-2}{2(p+1)}\right\}.
\end{aligned} \tag{7.175}$$

(7.175) より補題 7.26 を得た.□

証明　補題 7.18 の証明をする．

（第1段）補題 7.26 の証明と同様に V の正規直交基底 $\{v^1,\ldots,v^n\}$ を取り，V^* の座標関数 ξ_i $(i=1,\ldots,n)$ を $\xi_i(w):=w(v^i)$ $(w\in V^*)$ により定義する．そこで，

$$f:=(\xi_1+\sqrt{-1}\,\xi_2)^p\in H^p(V^*),\qquad \gamma(f)=(v^1+\sqrt{-1}\,v^2)^p\in\Theta^pV$$

を取る．このとき，補題 7.26 の証明の計算と同様に，$\|\gamma(f)\|^2=2^p$ である．

（第2段）一方，$S^{n-1}:=\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)|\sum_{i=1}^n{\xi_i}^2=1\}$ 上の $SO(n)$-不変測度 $d\sigma(\xi)$ として，

$$\int_{S^{n-1}}|f|^2\,d\sigma(\xi)=\int_{S^{n-1}}({\xi_1}^2+{\xi_2}^2)^p\,d\sigma(\xi)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{n}{2})}\tag{7.176}$$

が成り立つように定数倍を定める（p についての依存がこの等式を満たすように調整できることは自明でない）．

(7.176) より補題 7.18 を得る．

（第3段）(7.176) を示そう．

$$\begin{aligned}&Q_1(\xi):={\xi_1}^2+{\xi_2}^2,\quad Q_2(\xi):={\xi_3}^2+\cdots+{\xi_n}^2,\\&Q(\xi):={\xi_1}^2+\cdots+{\xi_n}^2\end{aligned}\tag{7.177}$$

とおく．$d\sigma(\xi)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準計量から誘導される $n-1$ 次元球面 S^{n-1} 上の体積要素とする．

このとき，

$$\int_{S^{n-1}}({\xi_1}^2+{\xi_2}^2)^p\,d\sigma(\xi)=\int_0^1 s^p\,h(s)\,ds\tag{7.178}$$

となる．ここで関数 $h(s)$ は $h(s)=\mu(\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n|\,Q=1,\,Q_1(\xi)=s\})$ と定義される．ただし μ を $\mathbb{R}^n$ 上の $(n-2)$ 次微分形式で

$$d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n=dQ_1\wedge dQ_2\wedge\mu$$

を満たすものとする．S^{n-1} の超平面 $\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n|\,Q=1,\,Q_1(\xi)=s\}$ の μ に関する全体積が $h(s)$ である．

ここで

$$\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \mid Q=1,\, Q_1=s\}=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2 | Q_1=s\}$$
$$\times\{(\xi_3,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-2} \mid Q_2=1-s\} \qquad (7.179)$$

であり，$\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2|Q_1=s\}$ (半径 $\sqrt{s}$ の 2 次元球面) 上の体積要素 μ_1 は $\mu_1=\frac{1}{\sqrt{s}}(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)$ と与えられ，$\{(\xi_3,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-2} \mid Q_2=1-s\}$（半径 $\sqrt{1-s}$ の $(n-3)$ 次元球面）上の体積要素 μ_2 は

$$\mu_2=\frac{1}{\sqrt{1-s}}\sum_{i=3}^{n}(-1)^{i-1}\,\xi_i\,d\xi_3\wedge\cdots\overset{i}{\vee}\cdots\wedge d\xi_n$$

で与えられる．

そこで $\mu=M\,\mu_1\wedge\mu_2$ を満たす $\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \mid Q=1,\, Q_1=s\}$ 上の関数 M を求める．

（第 4 段）実際，$M=\frac{1}{4\sqrt{s}\sqrt{1-s}}$ である．なぜなら，

$$\begin{aligned}
d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n &= dQ_1\wedge dQ_2\wedge\mu = M dQ_1\wedge dQ_2\wedge\mu_1\wedge\mu_2\\
&=\frac{4M}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}}(\xi_1\,d\xi_1+\xi_2 d\xi_2)\wedge(\xi_3\,d\xi_3+\cdots+\xi_n\,d\xi_n)\wedge\\
&\qquad\wedge(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\wedge\sum_{i=3}^{n}(-1)^{i-1}\,\xi_i\,d\xi_3\wedge\cdots\overset{i}{\vee}\cdots\wedge d\xi_n\\
&=\frac{4M}{\sqrt{s}\sqrt{1-s}}({\xi_1}^2+{\xi_2}^2)({\xi_3}^2+\cdots+{\xi_n}^2)\,d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n.
\end{aligned}$$

ゆえに $\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \mid Q=1,\, Q_1=s\}$ 上で，$M=\frac{1}{4\sqrt{s}\sqrt{1-s}}$ である．

（第 5 段）ところが，

$$\int_{\{Q_1=s\}}\mu_1=2\pi\sqrt{s}, \qquad \int_{\{Q_2=1-s\}}\mu_2=C_1\,(1-s)^{\frac{n-3}{2}}$$

である（C_1 は $(n-3)$ 次元の単位球面の表面積）したがって，

$$h(s)=\int_{\{Q=1,\,Q_1=s\}}\mu=\int_{\{Q=1,\,Q_1=s\}}M\,\mu_1\wedge\mu_2=\frac{2\pi\sqrt{s}\,C_1\,(1-s)^{\frac{n-3}{2}}}{4\sqrt{s}\sqrt{1-s}}$$

$$= \frac{\pi}{2} C_1 (1-s)^{\frac{n}{2}-2}.$$

よって (7.178) を，ベータ関数 $B(p,q) := \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $(p>0,\ q>0)$ を使って計算すると，

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} ({\xi_1}^2 + {\xi_2}^2)^p \, d\sigma(\xi) &= \int_0^1 s^p \, h(s) \, ds = \frac{\pi}{2} C_1 \int_0^1 s^p \, (1-s)^{\frac{n}{2}-2} \, ds \\ &= \frac{\pi}{2} C_1 \, B\left(p+1, \frac{n}{2}-1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} C_1 \, \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+p)} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2} C_1 \, \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \right\} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+p)}. \qquad (7.180)\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathbb{R}^n$ の標準計量から決まる S^{n-1} 上の体積要素を $\frac{\pi}{2} C_1 \Gamma(\frac{n}{2}-1)$ 倍したものを $d\sigma(\xi)$ とすれば，これが求めるものである．補題 7.18 を得た．□

証明 補題 7.28 の証明をする．V の正規直交基底を $\{v^i\}_{i=1}^n$ とし，$\xi_i(w) := w(v^i)$, $(w \in V^*)$ とおく．命題 7.23 より $W_- \cong \alpha(\Theta^{p-1}) \cong C(\Theta^p V \otimes V) \cong \Theta^{p-1} V$ であり，(7.78) と補題 7.21 より，$r^2 = {\xi_1}^2 + \cdots + {\xi_n}^2$ とおくと，$\alpha(\Theta^{p-1})$ に対応する V^* 上の多項式全体は $r^2 \, H^{p-1}(V^*)$ であった．

（第1段）さて $n = \dim V = 2m$（偶数）のときに示す．$\omega_i := v^{2i-1} + \sqrt{-1}\, v^{2i}$ $(i=1,\ldots,m)$ とし，$\omega := \sum_{i=1}^m ({\omega_1}^{p-1} \cdot \omega_i) \otimes \overline{\omega_i}$ とおくと $\omega \in W_-$ である．実際，${\omega_1}^{p-1} \cdot \omega_i \in \Theta^p V$ $(i=1,\ldots,m)$ となる．というのは対応する V^* 上の多項式を考えると，$(\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2)^{p-1} (\xi_{2i-1} + \sqrt{-1}\,\xi_{2i}) \in H^p(V^*)$ となるからである．$\mathcal{S}(\omega) \in \alpha(\Theta^{p-1})$ となることは対応する V^* 上の多項式を考えると，

$$\sum_{i=1}^m (\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2)^{p-1} ({\xi_{2i-1}}^2 + {\xi_{2i}}^2) = r^2 \, (\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2)^{p-1} \in r^2 \; H^{p-1}(V^*)$$

となっているからである．

（第2段）次に，

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} ({\omega_1}^{p-1} \cdot \omega_i) \otimes \overline{\omega_i} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s+t=p-1} {\omega_1}^{s} \otimes \omega_i \otimes {\omega_1}^{t} \otimes \overline{\omega_i}$$

であり，各項は mp 個の互いに直交するものからなり，かつ

$$\|{\omega_1}^{s} \otimes \omega_i \otimes {\omega_1}^{t} \otimes \overline{\omega_i}\|^2 = 2^{p+1}$$

である．したがって，

$$\|\omega\|^2 = \frac{1}{p^2}\, mp\, 2^{p+1} = \frac{m}{p}\, 2^{p+1}. \tag{7.181}$$

（第3段）一方，$\|\mathcal{S}(\omega)\|^2$ は次のように計算される．

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \mathcal{S}\left(\sum_{i=1}^{m} ({\omega_1}^{p-1} \cdot \omega_i) \otimes \overline{\omega_i} \right) \\ &= \frac{1}{p(p+1)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r+s+t=p-1} \big({\omega_1}^{r} \otimes \omega_i \otimes {\omega_1}^{s} \otimes \overline{\omega_i} \otimes {\omega_1}^{t} \\ &\qquad + {\omega_1}^{r} \otimes \overline{\omega_i} \otimes {\omega_1}^{s} \otimes \omega_i \otimes {\omega_1}^{t} \big). \end{aligned} \tag{7.182}$$

ここで (7.182) の各項は $m \cdot \frac{(p+1)p}{2} \cdot 2 = m(p+1)p$ 個の互いに直交するものからなり，それらのノルムの2乗はすべて 2^{p+1} である．したがって，

$$\|\mathcal{S}(\omega)\|^2 = \frac{1}{p^2(p+1)^2} \cdot m(p+1)p \cdot 2^{p+1} = \frac{m}{(p+1)p}\, 2^{p+1}. \tag{7.183}$$

（第4段）以上より，(7.181) と (7.183) より，

$$\frac{\|\mathcal{S}(\omega)\|^2}{\|\omega\|^2} = \frac{1}{p+1}$$

を得た．

$\dim V$ が奇数のときも同様であるので省略する．□

7.9 スペクトル剛性定理 7.1 の証明

証明 最後に，スペクトル剛性定理 7.1 の証明を行う．

（第 1 段）$n = \dim M \geq 3$, (M, g) を $\frac{1}{n}$-ピンチされたコンパクト・リーマン多様体とし，g_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ を g の変形で，

$$\mathrm{Spec}(M, g_t) = \mathrm{Spec}(M, g) \qquad (-\varepsilon < \forall\, t < \varepsilon)$$

とする．断面曲率はリーマン計量の変形に関して連続的に変化しているので，(M, g_t) $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ も $\frac{1}{n}$-ピンチされているとして良い．

このとき，補題 7.6, 7.7, 7.8 と定理 7.9, 7.10 により，各 g_t に対して (A), すなわち，$\frac{d}{dt}\big|_t g_t$ が無限小的に自明である（定義 7.5）ことが示された．つまり，M 上の C^∞ ベクトル場 X_t が存在して，

$$h_t := \frac{d}{dt}\bigg|_t g_t = \mathcal{L}_{X_t} g_t$$

が成り立つ $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$.

（第 2 段）M 上の C^∞ ベクトル場 X_t は t について C^∞ に依存する．実際，(M, g_t) の余接球束を $S_t{}^*M$ とし，各元 $h \in S^2(M)$ を g_t によって $C^\infty(S_t{}^*M)$ の元と見なしたものを $\widetilde{h}^t$ と書く（(7.22) 参照）．また，$H_t^p(M)$, $(p = 0, 1, \ldots)$, D_+^t, D_-^t, Ξ_t, ... をそれぞれ，(M, g_t) に関する $H^p(M)$, D_+, D_-, Ξ, ... を表すものとする．このとき，$h_t \in S^2(M)$ $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ に対応して $\widetilde{h_t}^t \in C^\infty(S_t{}^*M)$ が定まる．さらに (A$'$) での設定と定理 7.10 より，次のようになっていた（定義 7.31 の参照）：

$$\begin{aligned}
\widetilde{h_t}^t &= h_t^2 + h_t^0 && (h_t^2 \in H_t^2(M),\ h_t^0 \in H_t^0(M) \text{ とおく}) \\
&= \Xi_t\, u_t && (\exists\, u_t \in H_t^1(M) \cap C^\infty(S_t^* M),\ \text{定理 7.10 より}) \\
&= -(\mathcal{S}(\nabla^t X_t))^{\sim t} && (\text{命題 7.29 より}) \\
&= -(D_+^t X_t + D_-^t X_t)^{\sim t} && ((7.114)\ \text{より}). \qquad (7.184)
\end{aligned}$$

(7.184) の両辺の $H_t^2(M)$, $H_t^0(M)$ 成分を較べて, $-(D_+^t X_t)^{\sim t} = h_t^2$, $-(D_-^t X_t)^{\sim t} = h_t^0$ を得る．すなわち，

$$D_+^t X_t = -\gamma_t(h_t^2). \tag{7.185}$$

ここで $\gamma_t : C^\infty(S_t^* M) \cap H_t^2(M) \to \Gamma(\Theta_t^2))$ は (M, g_t) に関する (7.102) の同型対応である．

g_t と h_t は t について C^∞ に依存していたので，h_t^2 及び $\gamma_t(h_t^2)$ も t について C^∞ に依存している．(7.185) より，$D_+^t : \Gamma(\Theta_t^1) \to \Gamma(\Theta_t^2)$ も t について C^∞ に依存する楕円型偏微分作用素であり，さらに，(M, g_t) が負曲率であることから，D_+^t は単射である．

なぜなら，$X \in \Gamma(\Theta_t^1)$, すなわち，M 上の C^∞ ベクトル場とすると，

$$D_+^t X = \mathcal{S}(\nabla^t X) = \mathcal{L}_X g_t$$

となるので，$D_+^t X = 0$ とすると，X は (M, g_t) のキリング・ベクトル場となるが，(M, g_t) は負曲率なので，$X = 0$ となるからである (例えば [47], p.161, 命題 6.6 などを見よ).

このことから，t について C^∞ に依存する楕円型方程式 (7.185) の解 X_t もやはり t について C^∞ に依存することがわかる．

（第3段）M 上の t について C^∞ に依存する C^∞ ベクトル場 X_t に対して，次の性質を満たす（t について C^∞ に依存する）M の微分同相の族 φ_t を考える（ただし φ_0 は M 上の恒等写像とする）: s が t の近くのとき，$\psi_s := {\varphi_t}^{-1} \circ \varphi_s$ としたとき，

$$(X_t)_x f = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} f(\psi_s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} f({\varphi_t}^{-1} \circ \varphi_s(x)) \quad (f \in C^\infty(M)) \tag{7.186}$$

すなわち，$x \in M$ を通る曲線 $s \mapsto \psi_s(x)$ の x での接ベクトルが $(X_t)_x$ と一致する．

実際，このような M の微分同相の族 $\{\varphi_t\}$ が $t = 0$ の近傍上で存在することは次のように確かめられる．(7.186) は次と同等である：

$$\varphi_{t*x}(X_t)_x = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \varphi_s(x). \tag{7.187}$$

そこで，$x \in M$ の近傍での局所座標を $(x^1, \ldots, x^n)$ とし，$\varphi_t(x)$ の近傍での局所座標を $(y^1, \ldots, y^n)$ とし，$y^i(\varphi_t(x)) = \varphi^i(t, x)$ とすると，

$$\varphi_{t*x}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i(t,x)}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_t(x)}$$

である．このとき $(X_t)_x = \sum_{j=1}^n \eta^j(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x$ とすると，次の二式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\varphi_{t*x}(X_t)_x &= \sum_{j=1}^n \eta^j(t,x)\varphi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \eta^j(t,x)\frac{\partial \varphi^i(t,x)}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_t(x)},\end{aligned}$$

及び

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t}\varphi_s(x) = \sum_{i=1}^n \left.\frac{d\,y^i(\varphi_s(x))}{ds}\right|_{s=t}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_t(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i(t,x)}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_t(x)}.$$

ゆえに (7.187) は $\varphi^j(t,x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ を未知関数とする次の方程式系と同等である：

$$\sum_{j=1}^n \eta^j(t,x)\,\frac{\partial \varphi^i(t,x)}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi^i(t,x)}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.188}$$

$t = 0$ での初期データは $\varphi^i(0,x) = x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるので，1 階偏微分方程式系 (7.188) の解の存在と一意性により，φ_t で t について C^∞ に依存するものが存在することが示される（コーシー・コワレフスカヤの定理の特別な場合である．例えば [42] 429 B, p.1365 を見よ）．M はコンパクトなので，φ_t は M の微分同相であることもわかる．

（第 4 段）この M の微分同相の族 φ_t が g_t の自明性を与えるものであること，すなわち $g_t = {\varphi_t}^* g$ であることを見る．実際，各 t について，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\varphi_s}^{-1*} g_s &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\varphi_t}^{-1*}\, {\varphi_t}^{*}\, {\varphi_s}^{*-1} g_s \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\varphi_t}^{-1*}\, {\psi_s}^{-1*} g_s \\
&= {\varphi_t}^{-1*}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\psi_s}^{-1*} g_t + {\psi_t}^{-1*} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} g_s \right). \qquad (7.189)
\end{aligned}$$

ここで

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\psi_s}^{-1*} g_t = -\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\psi_s}^{*} g_t = -\mathcal{L}_{X_t} g_t \qquad (7.190)$$

であり，ψ_t は恒等写像であるので，${\psi_t}^{-1*} \frac{d}{ds}\big|_{s=t} g_s = h_t$ である．さらに $h_t = \mathcal{L}_{X_t} g_t$ であったので，(7.190) と合わせて (7.189) の右辺は零となる．すなわち，任意の t について，

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} {\varphi_s}^{-1*} g_s = 0 \qquad (7.191)$$

となる．したがって，任意の t について，

$${\varphi_t}^{-1*} g_t = {\varphi_0}^{-1*} g_0 = g$$

となる．すなわち，$g_t = {\varphi_t}^{*} g$ となり，$n = \dim M \geq 3$ の場合において，定理 7.1 の証明を終えた．

$n = \dim M = 2$ の場合は [31] を見よ．□

本書の校正中に，第 5 章でも取り上げたジョン＝ナッシュ氏夫妻の訃報に触れた．そこで，何か良い問題をと考え，以下いくつかの研究課題を与える．意欲のある読者は，是非取り組んでほしい．

(1) 第 5 章から．ペイン・ポリヤ・ワインバーガーの定理 5.1 の不等式 (5.2) を満たす数列は何か？ このような特徴をもつ数列を決定せよ．
(2) 第 6 章から．コラン＝ド＝ベルディィエの諸定理における性質 (P_1) または (P_2) をもつコンパクト・リーマン多様体について，負曲率多様体以外の例を与えよ．このようなリーマン多様体の良い特徴付けは何であろうか？
(3) 第 7 章から．スペクトル剛性をもつコンパクト・リーマン多様体で負曲率多様体以外の例を見出せ．また $\frac{1}{n}$-ピンチされるという条件は弱められるであろうか？
(4) 本書では扱えなかったが，非コンパクト・リーマン多様体の離散スペクトルについて，本書のような諸定理の類似は成り立つであろうか？

参考文献

[1] A. Aribi, S. Dragomir and A. El Soufi, "*On the continuity of the eigenvalues of a sublaplacian*", Canad. Math. Bull., **57** (2014), pp. 12–24.

[2] A. Aribi, "*Le spectre du sous-laplacien sur les variété CR strictement pseudoconvexes*", Thesis, Univ. Tours, France, Nov. 2012.

[3] S. Bando and H. Urakawa, "*Generic properties of the eigenvalue of the Laplacian for compact Riemannian manifolds*", Tohoku Math. J., **35** (2) (1983), pp. 155–172.

[4] M. Berger, "*Sur les premières valeurs des variétés riemanniennes*", Compositio Math., **26** (2) (1973), pp. 129–149.

[5] M. Berger, P. Gauduchon, and M. Mazet, "*Le spectre d'une variété riemannienne*", Lecture Notes in Math., **194**, Springer, 1971.

[6] P.H. Bérard, "*Spectral Geometry*": "*Direct and Inverse Problems*", Lecture Notes in Math., **1207**, Springer, 1986.

[7] A.L. Besse, "*Manifolds all of whose geodesics are closed*", Ergebnisse Math., **93**, Springer, 1978.

[8] G. Besson, "*Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien dans un domaine avec un trou*", Bull. Soc. Math. France, **113** (1985), pp. 211–230.

[9] I. Chavel, "*Eigenvalues in Riemannian Geometry*", Academic Press, 1984.

[10] I. Chavel and E.A. Feldman, "*Spectra of manifolds less a small domain*", Duke Math. J., **56** (1988), pp. 399–414.

[11] J. Chazarain, "*Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*", Invent. math., **24** (1974), pp. 65–82

[12] J. Cheeger, "*A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*", Problems in Analysis, Princeton Univ. Press, 1970, pp. 195–199.

[13] Q.M. Cheng and H.C. Yang, "*Estimates on eigenvalues of Laplacian*", Math. Ann., **331** (2005), pp. 445–460.

[14] Q.M. Cheng and H.C. Yang, "*Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem*", Trans. Amer. Math. Soc., **358** (2005), pp. 2625–2635.

[15] Q.M. Cheng and H.C. Yang, "*Inequalities for eigenvalues of Laplacian on*

domains and compact complex hypersurfaces in complex projective spaces", J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), pp. 545–561.

[16] S.Y. Cheng, "*Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*", Math. Z., **143** (1975), pp. 289–297.

[17] S.Y. Cheng, "*Eigenfunctions and nodal sets*", Comment. Math. Helv., **51** (1976), pp. 43–55.

[18] 神保秀一,『偏微分方程式入門』, 共立出版, 2006.

[19] クーラン・ヒルベルト,『数理物理学の方法』, 東京図書, 1995.

[20] R. Courant, "*Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations*", Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), pp. 1–23.

[21] R. Courant and D. Hilbert, "*Method of Mathematical Physics*" I, II, Wiley-Interscience, 1953, 1962; ""*Methoden der Mathematischen Physik*"", Vol. I, Springer, Berlin, 1931.

[22] Y.Colin de Verdièr, "*Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques*", I, II, Compositio Math., **27** (1973), pp. 83–106, pp. 159–184.

[23] C.B. Croke, "*Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*", Ann. scient. École Norm. Sup., **13**, (1980), pp. 419–435.

[24] J.J. Duistermaat and V.W. Guillemin, "*The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*", Inventiones Math., **29** (1975), pp. 39–79.

[25] A. El Soufi, E.M. Harrell and S. Ilias, "*Universal inequalities for the eigenvalues of Laplace and Schrödinger operators on submanifolds*", Trans. Amer. Math. Soc., **361** (2009), pp. 2337–2350.

[26] L.C. Evans and R.F. Gariepy, "*Measure Theory and Properties of Functions*", CRC Press, Boca Raton, 1992.

[27] H. Federer, "*Geometric Measure Theory*", Springer, 1969.

[28] H. Federer, " *Curvature measure*", Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), pp. 418-491.

[29] M.L. Gromov, "*Smoothing and inversion of differential operators*", Math. USSR Sbornik, **17** (1972), pp. 381-435.

[30] M.L. Gromov and V.A. Rokhlin, "*Embeddings and immersions in Riemannian geometry*", Russian Math. Survey., **25** (1970), pp. 1–57.

[31] V. Guillemin and D. Kazhdan, "*Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*", Topology, **19** (1980), pp. 301–312.

[32] V. Guillemin and D. Kazhdan, "*Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds*", Proc. Symp. Pure Math., **36** (1980), pp. 153–180.

[33] S. Helgason, "*Differential Geometry and Symmetric Spaces*", Academic

Press, 1962.

[34] 北原晴夫・河上肇,『調和積分論』, 近代科学社, 1991.

[35] S. Kobayashi and K. Nomizu, "*Foundations of Differential Geometry, Vol.*" I, II, Interscience Publ., 1963, 1969.

[36] 小竹武, 前田吉昭, 小沢真, 浦川肇, "*Surveys in Geometry*", 1980–81, "*Geometry of the Laplace Operator*", 1981.

[37] 松島与三,『多様体入門』, 裳華房, 1965.

[38] T. Matsuzawa and S. Tanno, "*Estimates of the first eigenvalue of a big cup domain of a 2-sphere*", Compositio Math. **47**(1982), pp.95–100.

[39] J. Milnor, "*Morse Theory*", Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, 1963.

[40] ミルナー, 志賀浩二訳,『モース理論』吉岡書店, 1968.

[41] J.F. Nash, "*The imbedding problem for Riemannian manifolds*" Ann. Math., **63** (1956), pp. 20–63.

[42] 日本数学会編,『岩波数学辞典 第4版』, 岩波書店, 2007.

[43] M. Obata, "*Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*", J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), pp. 333–340.

[44] S. Ozawa, "*Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*", Duke Math. J., **48** (1981), pp. 767–778.

[45] L.E. Payne, G. Pólya and H.F. Weinberger, "*On the ratio of consecutive eigenvalues*", J. Math. Physics, **35** (1956), pp. 289–298.

[46] T. Sakai, "*On eigen-values of Laplacian and curvature of Riemannian manifold*", Tohoku Math. J., **23** (1971), pp. 589–603.

[47] 酒井隆,『リーマン幾何学』裳華房, 1992.

[48] 佐武一郎,『線型代数学』裳華房, 1974.

[49] 砂田利一,『基本群とラプラシアン–幾何学における数論的方法』紀伊國屋書店, 1988.

[50] 竹内勝,『現代の球関数』, 岩波書店, 1975.

[51] 梅原雅顕・山田光太郎,『曲線と曲面』, 裳華房, 2002.

[52] 浦川肇,『変分法と調和写像』, 裳華房, 1990.

[53] 浦川肇,『ラプラス作用素とネットワーク』, 裳華房, 1996.

[54] 浦川肇,『ラプラシアンの幾何と有限要素法』, 朝倉書店, 2009.

[55] H. Urakawa, "*On the least positive eigenvalue of the Laplacian for the compact quotient of a certain Riemannian symmetric space*", Nagoya Math. J., **78**(1980), pp.137–152.

[56] S.T. Yau, "*Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold*", Ann. sient. École Norm. Sup., **8** (1975), pp.487–507.

索　引

か行

さ行

ま行

や行

ら行

わ行

著者略歴

浦川　肇（うらかわ　はじめ）

略歴　1946年　兵庫県城崎郡城崎町（現・豊岡市城崎町）生まれ
1969年　東北大学理学部数学科卒業
1971年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
1972年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻博士課程退学
1972年　名古屋大学理学部助手
1978年　東北大学教養部助教授
1992年　東北大学教養部教授
1993年　東北大学大学院情報科学研究科教授
2010年　東北大学国際教育院教授
現　在　東北大学名誉教授．理学博士（名古屋大学）

この間　1983–85年　マックスプランク数学研究所（独・ボン）客員教授
1989–90年　数理科学研究所（MSRI, 米・バークレー）研究教授

著書　『変分法と調和写像』，裳華房，1990年
"*Calculus of Variations and harmonic Maps*", American Mathematical Society,1993
『ラプラス作用素とネットワーク』，裳華房，1996年
『ラプラシアンの幾何と有限要素法』，朝倉出版，2009年

共立講座 数学の輝き3
スペクトル幾何
（Spectral Geometry）

2015年6月25日　初版1刷発行

著　者　浦川　肇　© 2015
発行者　南條光章
発行所　**共立出版株式会社**
〒112-0006
東京都文京区小日向4-6-19
電話番号　03-3947-2511（代表）
振替口座　00110-2-57035
共立出版㈱ホームページ
http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂
製　本　ブロケード

一般社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan

検印廃止
NDC 415.52
ISBN 978-4-320-11197-4